

Méthode de pénalisation dans le cas non linéaire et dans un cadre Hilbert

April 26, 2020

0.1 Méthode de pénalisation

Dans cette partie on va résoudre inéquation variationnelle elliptique 1ère et 2ème espèce par la méthode de pénalisation dans le cas non linéaire et dans cadre Hilbert.

0.1.1 Inéquations variationnelles du première espèce

Nous proposons une extension de l'existence et l'unicité des inéquations variationnelles. Soit V est un espace de Hilbert, $A : V \rightarrow V$ un opérateur et $K \subset V$ un sous-ensemble ; et notée $(\cdot, \cdot)_V$ le produit scalaire dans Hilbert. Nous considérons le problème

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u &\in K \text{ telle que} \\ (Au, v - u) &\geq 0, \forall v \in K \end{aligned} \quad (1.1)$$

Problème de Pénalisation

Nous étudions maintenant l'unicité de la solution de l'inéquation variationnelle (1.1) en utilisant une méthode de pénalisation.

On suppose dans ce qui suit $A : V \rightarrow V$ et nous considérons un opérateur β qui satisfait les conditions suivantes :

$$(a) \quad \beta : V \rightarrow V \text{ est un opérateur monotone lipschitzien} \quad (1.2)$$

$$(\beta v - \beta u, v - u) \geq 0 \forall u \in V, v \in V; \quad (1.3)$$

$$(b) \quad \beta u = 0 \text{ ssi } u \in K. \quad (1.4)$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ nous considérons le problème suivant: de trouver un élément u_ε telle que

$$u_\varepsilon \in V, (Au_\varepsilon + \varepsilon\beta(u_\varepsilon), v) = 0 \text{ pour tout } v \in V \quad (1.5)$$

On a le résultat de l'existence, l'unicité et de la convergence suivant :

Theorem 1 *Soit V un espace de Hilbert et soit $K \subset V$ un sous ensemble convexe fermé et non vide de V .*

Supposons que $A : V \rightarrow V$ est un opérateur strictement monotone lipschitzien continu,

β est un opérateur qui satisfait (1.2-1.3-1.4) alors :

1. pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un élément unique u qui vérifié l'équation non linéaire (1.5)

2. u_ε solution de (1.5) converge fortement à la solution u de (1.1), c'est à dire :

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

3.. il existe un élément unique u qui vérifie l'inéquation variationnelle (1.1).
La démonstration de ce théorème est répartie en plusieurs étapes
On commence par l'unicité de la solution de l'équation non linéaire (1.5).

Lemma 2 *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un élément unique qui vérifie l'équation non linéaire (1.5).*

Proof. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque A est strictement monotone et lipschitzien continue, par hypothèse (1.2-(a)) il en résulte que l'opérateur $v \rightarrow Av + \frac{1}{\varepsilon}\beta v$ est également un opérateur fortement monotone lipschitzien continue sur V . ■

Etape 1 : Estimation a priori

Ensuite, nous pouvons faire l'estimation a priori sur la solution de l'équation (3.5),

qui impliquent le résultat de convergence suivant.

Lemma 3 *Il existe un élément $u \in V$ et une sous-suite $\{u_\varepsilon\}$ qui converge*

Lemma 4 *faiblement vers u*

$$(u_\varepsilon - u) \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

Proof. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $v_0 \in K$. Nous utilisons (1.1) pour obtenir: ■

1

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \varepsilon(\beta u_\varepsilon, v_0 - u_\varepsilon) = 0$$

alors

$$\begin{aligned} (Au_\varepsilon - Av_0, u_\varepsilon - v_0) &= (Av_0, v_0 - u_\varepsilon) + \\ &\quad \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, v_0 - u_\varepsilon) \end{aligned}$$

En se basant sur les résultats précédent et l'inéquation de Cauchy-Schwarz

$$m \|u_\varepsilon - v_0\|_V^2 \leq \|Av_0\|_V \cdot \|u_\varepsilon - v_0\|_V$$

et donc,

$$\|u_\varepsilon - v_0\|_V \leq \frac{1}{m} \|Av_0\|_V$$

et le fait que

$$\|u_\varepsilon\|_V \leq \|u_\varepsilon - v_0\|_V + \|v_0\|_V$$

Il en résulte alors qu'il existe une constante $C > 0$, tq

$$\|u_\varepsilon\|_V \leq C$$

Etape 2 : la convergence faible

Lemma 5 *La suite $\{u_\varepsilon\}$ converge faiblement vers l'élément u dans V .*

Proof. La preuve du lemme 4 montre que si u est la limite faible d'une suite faiblement

convergente de la suite $\{u_\varepsilon\} \subset V$, alors u est solution l'inéquation variationnelle (1.1).

Rappelons également que cette inéquation variationnelle a une solution unique et de plus, la preuve du lemme 2 montre que la suite $\{u_\varepsilon\}$ est bornée dans V . ■

Etape 3 : passage à la limite

Ensuite, nous étudions les propriétés de la solution u défini dans le lemme 2.

Lemma 6 *L'élément u satisfait l'inéquation variationnelle (1.1) et*

Par ailleurs, le problème 1.5 admet une solution unique.

Proof. d'après lemme 2, nous considérons la suite $\{u_\varepsilon\}$ telle que (1.7) vraie. Soit $\varepsilon > 0$

et soit v un élément arbitraire dans V , nous utilisons (1.5) alors :

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \beta u_\varepsilon, v - u_\varepsilon = 0$$

■

ce qui implique l'opérateur A est lipschitzien, et le fait que A est contractant, obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon} (\beta u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \leq M \|u_\varepsilon\|_V \cdot \|u_\varepsilon\|_V + \|A_0\|_V \cdot \|v - u_\varepsilon\|_V$$

Ensuite, nous utilisons (1.9) et l'inéquation précédente pour montrer qu'il existe une constante positive qui dépend de v ,

mais est indépendante de ε telle que :

$$(\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \leq C\varepsilon \quad (1.10)$$

Nous prenons maintenant $v = u$ dans (1.10), puis nous passons à la limite supérieure quand

$\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'inéquation résultant pour obtenir

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) = 0 \quad (1)$$

Par conséquent, en utilisant l'hypothèse (1.2)-(a) et la convergence (1.7) on déduit que :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \leq (\beta u, u - v), \quad \forall v \in V \quad (1.11)$$

D'autre part, l'inéquation (1.10) implique que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \leq 0, \quad \forall v \in V \quad (1.12)$$

En faisant la soustraction de (1.11) et (1.12) on obtient,

$$(\beta u, u - v) \leq 0 \forall v \in V \quad (1.13)$$

Prenons dans l'équation (1.13)

$$v = u - \beta u$$

On obtient,

$$(\beta u, \beta u) \leq 0$$

C.à.d,

$$\|\beta u\|_V^2 \leq 0$$

On déduit que

$$\beta u = 0$$

Et en utilisant l'hypothèse (1.4)-(c) nous obtenons :

$$u \in K \quad (2)$$

De l'équation (1.5)

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) = 0$$

et l'hypothèse (1.3)-(b), nous trouvons

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v) = \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \leq 0, \quad \forall v \in K \quad (1.14)$$

en trouve de ce qui précède

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \leq 0, \quad \forall v \in K$$

Nous utilisons maintenant (1.13) , et en prenant $v = u$ dans (1.14), puis nous passons à la

limsup quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'inéquation (1.14) et en utilisant la convergence faible(1.7).

On obtient,

$$\limsup(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \leq 0 \quad (1.15)$$

En utilisant la définiton 6, on trouve

$$\liminf(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \geq (Au, u - v), \forall v \in V \quad (1.16)$$

D'un autre côté, en passant à la limite inférieure quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (1.14) ,

$$\liminf(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \leq 0, \quad \forall v \in K \quad (1.17)$$

En combinant les inéquations (1.16) et (1.17)

$$(Au, u - v) \leq 0, \forall v \in K,$$

et donc

$$(Au, v - u) \geq 0, \forall v \in K \quad (1.18)$$

Il en résulte maintenant de (1.13) et (1.18) que u satisfait l'inéquation variationnelle (1.1), qui conclut de la première partie du lemme. Pour l'unicité de la solution en utilisant la forte monotonie de l'opérateur A

Etape 4 : la convergence forte

Lemma 7 *La suite $\{u_\varepsilon\}$ converge fortement vers l'élément u en V c'est à dire :*

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.19)$$

Proof. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $v = u$ dans (1.16) tel que

$$\liminf (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \geq 0,$$

■

nous combinons cette inégalité avec (1.15), on obtient,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v) = 0 \quad (1.20)$$

D'autre part, de la convergence faible de la suite $\{u_\varepsilon\}$ vers u , on obtient le résultat suivant

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)$$

Le fait que A est un opérateur fortement monotone, alors

$$\begin{aligned} m \|u_\varepsilon - u\|_V^2 &\leq (Au_\varepsilon - Au, u_\varepsilon - u) \\ &= (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u) - (Au, u_\varepsilon - u) \end{aligned}$$

Ces résultats montrent d'une part l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation variationnelle (1.1)

et d'autre part que la suite u_ε du problème (1.5) converge fortement vers la solution de (1.1) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

0.2 Inéquations variationnelles du deuxième espèce

Considérons le problème d'inéquation variationnelle de deuxième espèce suivant:

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ telle que} \\ (Au, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u), \forall v \in K \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans l'étude des inéquations variationnelles de deuxième espèce (2.1), nous considérons que les hypothèses suivantes :

Soit V un espace de Hilbert

K est un sous-ensemble non vide fermé convexe de V , (2.2)

$A : K \rightarrow V$ est un opérateur monotone lipschitzien continue (2.3)

$j : K \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle convexe propre semicontinue inférieurement. (2.4)

0.2.1 Régularisation

Nous considérons maintenant l'inéquation variationnelle (2.1) dans le cas où $K = V$ et nous étudions

l'unicité de solution en utilisant une méthode de régularisation, nous supposons que :

$A : V \rightarrow V, j : V \rightarrow \mathbb{R}$ sont données et nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ (Au, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0, \forall v \in V \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Soit un paramètre $\varepsilon > 0$. Nous supposons également qu'il existe une famille de fonctionnelles (j_ε) qui satisfait :

1. $j_\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$: est une fonction différentiable aux sens Gâteaux et convexe, pour chaque $\varepsilon > 0$.

2. $\nabla j_\varepsilon : V \rightarrow V$ est un opérateur lipschitzien continue, pour chaque $\varepsilon > 0$;

$$\begin{aligned} \text{soit } F & : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ |j_\varepsilon(v) - j(v)| & \leq F(\varepsilon) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\varepsilon) & = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_\varepsilon \in V \text{ telle que} \\ Au_\varepsilon + \nabla j_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Theorem 8 Soit V un espace de Hilbert, $A : V \rightarrow V$ un opérateur fortement

monotone lipschitzien continue, et $j : V \rightarrow \mathbb{R}$, (j_ε) est une famille de fonctionnelles qui satisfait

(2.2), (2.4).

(1)- pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un élément unique u_ε qui vérifie l'équation non linéaire (2.7).

(2)- La solution de u_ε (2.7) converge fortement à la solution u (2.5), à savoir $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans V quand $\varepsilon \rightarrow 0$

(3)- il existe un élément unique u qui vérifie l'inéquation variationnelle (2.5)

La preuve du théorème sera réalisée en plusieurs étapes.

Proof. Soit $\varepsilon > 0$, en utilisant la différentiabilité aux sens Gâteaux et l'hypothèse (2.3), et ■

∇j_ε l'opérateur gradient est monotone lipschitzien continue sur V . Par conséquent,

étant donné que l'opérateur A est fortement monotone et lipschitzien continue, il en résulte que

$A + \nabla j_\varepsilon$ est opérateur également fortement monotone lipschitzien continue sur V . Ensuite,

nous utilisons l'hypothèse de la convergence uniforme (2.6) pour obtenir la résultat suivant

sur la fonctionnelle j .

Lemma 9 *La fonctionnelle j est convexe et faiblement semi continue inférieurement.*

Proof. Soit $u, v \in V$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous utilisons la convexité de la fonction j_ε alors

$$j_\varepsilon(u + \lambda(v - u)) \leq (1 - \lambda)j_\varepsilon(u) + \lambda j_\varepsilon(v)$$

■

pour chaque $\varepsilon > 0$, nous passons à la limite que $\varepsilon \rightarrow 0$ dans cette inéquation et utilisant (2.6), on obtient

$$j(u + \lambda(v - u)) \leq (1 - \lambda)j(u) + \lambda j(v)$$

ce qui prouve la convexité de j . Ensuite, supposons que $u \in V$ et soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments dans V

tel que $u_n \rightarrow u$ dans V . Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Nous écrivons

$$j(u) = j(u) - j_\varepsilon(u) + j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_n) + j_\varepsilon(u_n) - j(u_n) + j(u_n)$$

Ensuite, nous utilisons l'hypothèse (2.5) pour obtenir

$$j(u) \leq j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_n) + j(u_n) + 2F(\varepsilon)$$

de manière équivalente

$$j(u) + j_\varepsilon(u_n) \leq j_\varepsilon(u) + j(u_n) + 2F(\varepsilon)$$

Nous passons à la limite inférieure de cette inéquation $n \rightarrow \infty$. Par conséquent, nous obtenons :

$$j(u) + \liminf_{n \rightarrow \infty} j_\varepsilon(u_n) \leq j_\varepsilon(u) + \liminf_{n \rightarrow \infty} j(u_n) + 2F(\varepsilon) \quad (2.8)$$

D'autre part, sachant que l'inéquation

$$j_\varepsilon(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} j_\varepsilon(u_n) \quad (2.9)$$

La fonction j_ε est semi continue inférieure, assurée par hypothèse (2.8). Maintenant combinant (2.8) et (2.9) alors

$$j(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} j(u_n) + F(\varepsilon) \quad (2.10)$$

Enfin, en passant à la limite (2.10) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ utilisant l'hypothèse (2.5) on déduit que j est semi continue inférieurement.

Etape 1 : Estimation a priori

,Nous pouvons faire l'estimation a priori sur la solution de l'équation (2.7), ce qui implique le résultat de convergence suivant.

Lemma 10 *Il existe un élément $u \in V$ et un sous-suite de la suite $\{u_\varepsilon\}$, qui converge faiblement vers u à savoir*

$$u_\varepsilon - u \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

Proof. Soit $\varepsilon > 0$, nous utilisons (2.7) pour obtenir

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + (\nabla j_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) = 0, \forall v \in V$$

■

on en déduit que :

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 0, \forall v \in V \quad (2.12)$$

Nous utilisons $v = 0$ dans (2.12) avec

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon) + j_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq j_\varepsilon(0)$$

En Combinant cette inéquation avec les inéquations

$$\begin{aligned} j(u) &\leq j_\varepsilon(u_\varepsilon) \\ j_\varepsilon(0) &\leq j(0) \end{aligned}$$

ce ci implique que,

$$(Au_\varepsilon - A0u_\varepsilon) + j(u_\varepsilon) \leq -(A0, u_\varepsilon) + j(0) - 2F(\varepsilon) \quad (2.13)$$

D'autre part, le fait que j est semi continue inférieurement et d'après théorème la représentation de Riesz et il existe $\alpha \in IR$ tel que

$$j(u_\varepsilon) \geq (\omega, u_\alpha) + \alpha \quad (2.14)$$

Par conséquent, la combinaison de (2.13) et (2.14) et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, il

en résulte que l'inéquation

$$m \|u_\varepsilon\|_V^2 \leq (\|A0\|_V \|\alpha\|_V) \|u_\varepsilon\|_V + |j(0)| + 2F(\varepsilon) + |\alpha|$$

En utilisant les relations

$$x, a, b \geq 0 \text{ et } x^2 \leq ax + b \Rightarrow x^2 \leq a^2 + 2b$$

et l'hypothèse (2.6) on déduit que la suite $\{u_\varepsilon\}$ est bornée dans V quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Etape 2 : la convergence faible

Lemma 11 *La suite $\{u_\varepsilon\}$ converge faiblement vers l'élément u dans V .*

Proof. la preuve du lemme montre que si u est la limite faible d'une suite faiblement convergente de la suite $\{u_\varepsilon\} \subset V$,

alors u satisfait l'inéquation variationnelle (2.5).

Rappelons aussi que cette inéquation variationnelle admet une solution unique et d'ailleurs,

le lemme précédent montre que la suite $\{u_\varepsilon\}$ est bornée dans V . ■

Etape 3 : passage a la limite

Ensuite, nous étudions les propriétés de l'élément u défini dans le lemme suivant.

Lemma 12 *L'élément u satisfait l'inéquation variationnelle (2.5) et Par ailleurs, cette inéquation est unique .*

Proof. d'après le lemme précédent nous considérons une suite $\{u_\varepsilon\}$ telle que (2.11) est vérifiée. Soit ■

$\varepsilon > 0$, nous utilisons (2.12) avec $v = u$ tel que

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \leq j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad (2.15)$$

On peut écrire

$$j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) = j_\varepsilon(u) - j(u) + j(u) - j(u_\varepsilon) + j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

En utilisant l'hypothèse (2.6) tel que

$$j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq j(u) - j(u_\varepsilon). \quad (2.16)$$

Passant à la limite supérieure quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'inéquation précédente et utilisant l'hypothèse (2.6) ,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} j_\varepsilon(u) - j(u_\varepsilon) \leq j(u) - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} j(u_\varepsilon) \quad (2.17)$$

Enfin, en passant à la limite supérieure quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (2.15) et en utilisant (2.16) alors

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \leq 0 \quad (2.18)$$

En utilisant maintenant (2.11), (2.18) et de la monotonie hemicontinue on déduit que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \geq (Au, u - v), \forall v \in V \quad (2.19)$$

En utilisant l'inéquation (2.12) , on obtient alors

$$j(v) + j_\varepsilon(v) - j(v) + j(u_\varepsilon) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq j(u_\varepsilon) + (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v), \forall v \in V. \quad (2.20)$$

Passant à la limite inférieure quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (2.20) et utilisant l'hypothèse (2.6),

j est semi continue inférieurement et de l'inéquation (2.19), on obtient

$$j(v) \leq j(u) + (Au, u - v) \quad (2.21)$$

Il en résulte maintenant de (2.21) que u satisfait l'inéquation variationnelle (2.5),

Pour l'unicité on utilise la forte monotonie de l'opérateur A ;

La dernière étape est fournie par le résultat de la convergence forte suivant:

Étape 4 : la convergence forte

Lemma 13 *La suite $\{u_\varepsilon\}$ converge fortement vers l'élément u dans V ,*

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

Proof. Soit $\varepsilon > 0$, nous prenons $v = u$ dans (2.19) alors

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \geq 0 \quad (2.23)$$

■

Nous combinons cette inéquation avec (2.18), on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u) = 0 \quad (2.24)$$

D'autre part, de la convergence faible $\{u_\varepsilon\}$ vers u , il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Au, u_\varepsilon - u) = 0 \quad (2.25)$$

A un opérateur fortement monotone, alors

$$\begin{aligned} m \|u_\varepsilon - u\|_V^2 &\leq (Au_\varepsilon - Au, u_\varepsilon - u) \\ &= (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u) - (Au, u_\varepsilon - u) \end{aligned} \quad (2.26)$$

La convergence (2.22) est maintenant une conséquence de (2.24) - (2.25), nous pouvons

maintenant facilement fournir la preuve du théorème précédent.

En premier : l'existence et l'unicité de solution à l'inéquation variationnelle (2.5) ;

par la suite, nous prouvons que la suite des solutions u_ε du problème (2.7) converge forte vers la solution de (2.5) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.