Solutions

Exercice 1 p. 2

Substituons le champ de vitesse en coordonnées cartésiennes dans les équations

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Il vient que, pour le cas présent :

$$a_x = \frac{\partial(\alpha x)}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial(\alpha x)}{\partial x} + \beta y\frac{\partial(\alpha x)}{\partial y} - (\alpha+\beta)z\frac{\partial(\alpha x)}{\partial z}$$

$$a_x = \alpha^2 x$$

$$a_y = \frac{\partial(\beta y)}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial(\beta y)}{\partial x} + \beta y\frac{\partial(\beta y)}{\partial y} - (\alpha+\beta)z\frac{\partial(\beta y)}{\partial z}$$

$$a_y = \beta^2 y$$

$$a_z = \frac{\partial(-(\alpha+\beta)z)}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial(-(\alpha+\beta)z)}{\partial x} + \beta y\frac{\partial(-(\alpha+\beta)z)}{\partial y} - (\alpha+\beta)z\frac{\partial(-(\alpha+\beta)z)}{\partial z}$$

$$a_z = (\alpha+\beta)^2 z$$

Dans ce cas l'accélération locale est nulle. L'accélération totale est formé seulement de la contribution convective. Le résultat final est donc

$$\vec{a} = \alpha^2 x\,\vec{i} + \beta^2 y\,\vec{j} + (\alpha+\beta)^2 z\,\vec{k}$$

Exercice 2 page 7

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_x = 0 + 5x \times 5 + 8y \times 0 + (-13)z \times 0$$

$$\vec{a}_x = 25x\vec{i}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_y = 0 + 5x \times 0 + 8y \times 8 + (-13)z \times 0$$

$$\vec{a}_y = 64y\vec{j}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= 0 + 0 + 0 + (-13)z(13)$$

$$\vec{a}_z = 169z\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$= 25x\vec{i} + 64y\vec{j} + 169z\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \left[(25x)^2 + (64y)^2 + (169z)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 182.435 \text{ ua}$$

$$\vec{F} = m|\vec{a}| = 1 \times 182.435 = 182.435 \text{ uF}$$

Exercice $\triangle 1$ page $\triangle 10$

A: 1D l'écoulement se fait selon l'axe des Z seulement

B: 3D l'écoulement se fait selon les 3 axe, z, y et z

C: 1D l'écoulement varie seulement selon l'angle θ

D: 1D l'écoulement se fait selon l'axe des Z seulement

E: 2D l'écoulement se fait selon les axes x et y

F: 2D l'écoulement varie selon le rayon et l'angle θ.

S4

Exercice 2 page 6

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ points par lesquelles passent les deux lignes de courant $(e,1)$ et $(1,1)$

L'équation differentielle s'écrit

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + c$$

$$\ln x = \ln y + c$$

point $(e,1)$

$$\ln e = \ln 1 + c$$

$$1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

Donc $\ln y = \ln x - 1$

$$\ln y = \ln x - \ln e$$

$$\ln y = \ln \frac{x}{e} \Rightarrow y = \frac{x}{e}$$ est l'équation cherchée

Ex 3 page $\boxed{6}$

(a) $u = 2x\vec{i} + 0.5y\vec{j}$

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{0.5y} = 2\frac{dy}{y}$$

$$\frac{dx}{2x} = 2\frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{2}\ln x = 2\ln y + C$$ pour la ligne passant par le point $(1,1)$

$$\frac{1}{2}\ln 1 = 2\ln 1 + C \Rightarrow C = 0$$

L'équation de cette ligne de courant est, donc:

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln x$$

$$\Rightarrow \quad y = x^{4}$$

Exercice 2 page (7)

Examinons les trajectoires des particules. On voit que seule la coordonnée X varie avec le temps et dépend de la coordonnée initial Y_0

1. L'unité de l'équation du modèle mathématique est le mètre $[X] = [X_0] = m$ donc le $2^{ème}$ terme du membre droit de l'équation doit avoir comme unité le mètre. En effet

$$\frac{[h^2][P_2 - P_1]}{[\mu][L]} \cdot \frac{[Y]}{[h]} \cdot [t] = \frac{m^2 N m^2 m s}{N s m^2 m m} = m$$

Le modèle est consistant

2. Un manomètre différentielle nous donne directement la différence $P_2 - P_1$

3. La position future de la particule initialement située sur l'axe de la conduite $X_0 = x_1$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$ pour déterminer cette position on introduit les valeurs initiales spécifiques $X_0 = x_1$, $Y_0 = 0$ et $Z_0 = 0$ au temps $t_1 = t_0 + \frac{4\mu L}{h(P_1 - P_2)}$ dans les 3 composantes de la trajectoire de la particule pour obtenir X, Y et Z

$$X = (x_1) + \left[\frac{h^2(P_1 - P_2)}{2\mu L}\right]\left[1 - \left(\frac{0}{h}\right)^2\right]\left[\frac{4\mu L}{h(P_1 - P_2)}\right]$$

$$= (x_1) + \left[\frac{h^2(P_1 - P_2)}{2\mu L}\right]\left[\frac{4\mu L}{h(P_1 - P_2)}\right] = x_1 + 2h$$

$$Y = 0$$

et

$$Z = 0$$

Ainsi $\vec{X} = (x_1 + 2h)\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

On voit que la particule ① s'est déplacée d'une distance égale à $2h$, la hauteur du canal.

4. La position de la particule ② au temps t_1 est déterminée en suivant la même procédure, introduire ses coordonnées spaciales et temporelles dans le modèle mathématique. On trouve

$$\vec{X} = \left(x_1 + \frac{3}{2}h\right)\vec{i} + \left(\frac{h}{2}\right)\vec{j} + 0\vec{k}$$

On remarque que la particule ② est en retard par la particule ① de $0.5h$ mais suit la ligne parallèle à l'axe de la particule ① et distant de cet axe de $\frac{h}{2}$

5. Puisqu'on suit la particule c'est l'approche de Lagrange par définition.

Exercice 3 p. 9

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{x}_0 + \vec{u}_\infty (t - t_0)\right) = \vec{u}_\infty$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{dy_0}{dt} = \vec{0}$$

et $\vec{w} = \frac{d\vec{z}}{dt} = \frac{dz_0}{dt} = \vec{0}$

ou le vecteur vitesse $\vec{V}$

$$\vec{V} = u_\infty \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

et comme cette vitesse est independante de temps l'acceleration est nulle. L'écoulement est alors uniforme.