

Conservation de la quantité de mouvement

$$\sum_{\text{sur le système}} \vec{F} + \sum_{\text{in}} (\dot{m}\vec{v})_i - \sum_{\text{out}} (m\vec{v})_e = \frac{d}{dt} (m\vec{v})_{\text{sys}}$$

Comme le moment est un vecteur cette équation représente les trois (03) composantes dans un espace tridimensionnel.

Extensive property

Une propriété extensive est une propriété qui dépend de la quantité de la matière présente tels que la masse m , la quantité de mouvement $m\vec{v}$, et l'énergie en Joule. Dans le système SI, le poids (poids) = mg .

Une propriété intensive est une propriété qui ne dépend pas de la quantité de la matière tels que la pression, la température. Plusieurs propriétés intensives peuvent être obtenues en divisant la propriété extensive par la masse. En général la propriété extensive est désignée par B la propriété intensive b .

$$b = \frac{B}{m}$$

$$\text{si } B = m \rightarrow b = 1$$

$$\text{si } B = m\vec{v} \rightarrow b = \frac{m\vec{v}}{m} = \vec{v}$$

$$\text{si } B = E \rightarrow b = \frac{E}{m} = e$$

①

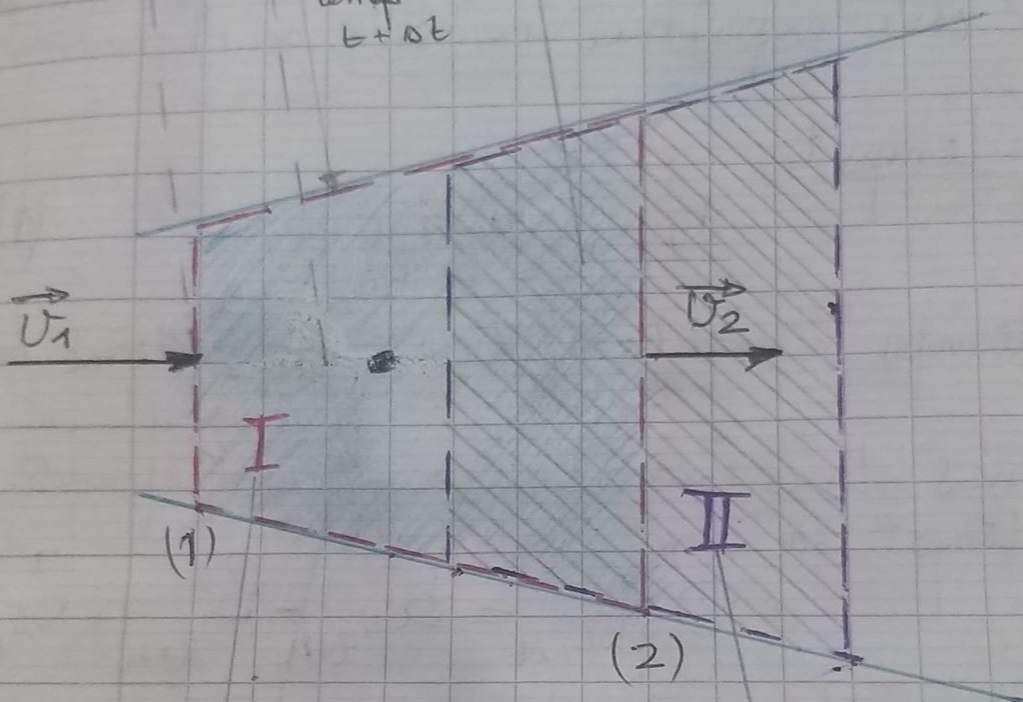
Derivation de RTT.

Volume de Contrôle (VC) au temps $t + \Delta t$ et t

Système (matière) au temps t

Système (matière) au temps $t + \Delta t$

Surface de contrôle au temps t et $t + \Delta t$



Ecoulement entrant (Δt)

Ecoulement sortant (Δt)

Au temps t $S_{ys} = VC$
 au temps $t + \Delta t$ $S_{ys} = VC - I + II$

Fig(RTT): Un système en mouvement (bleu) à travers une conduite divergente aux temps t et $t + \Delta t$

②

Si B est la propriété extensive et
 $\frac{B}{m} = b$ la propriété intensive

Notons que la propriété extensive est
 additive.

La propriété extensive B au temps t et $t + \Delta t$
 peut être exprimée, comme suit

au temps t $B_{\text{sys}} = B_{\text{VDC}} \quad (1)$

au temps t et le VDC et le système sont

confinés dans la même frontière

au temps $t + \Delta t$

$$B_{\text{sys}} = B_{\text{CV}} - B_{\text{I}} + B_{\text{II}} \quad (2)$$

$$\frac{(2) - (1)}{\Delta t} \Rightarrow \frac{B_{\text{sys}}(t + \Delta t) - B_{\text{sys}}(t)}{\Delta t} =$$

$$\frac{B_{\text{CV}}(t + \Delta t) - B_{\text{CV}}(t)}{\Delta t} - \frac{B_{\text{I}}(t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{B_{\text{II}}(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

La limite de l'équation (3) quand $\Delta t \rightarrow 0$ (3)
 et l'utilisation de la définition de la dérivée
 donne :

(3)

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{cv}}{dt} - \dot{B}_{in} + \dot{B}_{out} \quad (4)$$

$$\text{ou } \frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{cv}}{dt} - b_1 g_1 U_1 A_1 + b_2 g_2 U_2 A_2$$

Comme

$$B_{I,t+\Delta t} = b_1 m_{I,t+\Delta t} = b_1 g_1 V_{I,t+\Delta t} = \rho b_1 U_1 \Delta t A_1$$

$$B_{II,t+\Delta t} = b_2 m_{II,t+\Delta t} = b_2 g_2 V_{II,t+\Delta t} = b_2 g_2 U_2 \Delta t A_2$$

$$\text{et } \dot{B}_{in} = \dot{B}_I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{I,t+\Delta t} - B_{I,t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b_1 g_1 U_1 \Delta t A_1}{\Delta t} = g_1 b_1 U_1 A_1$$

$$\dot{B}_{out} = \dot{B}_{II} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{II,t+\Delta t} - B_{II,t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b_2 g_2 U_2 \Delta t A_2}{\Delta t} = b_2 g_2 U_2 A_2$$

L'équation (4) énonce que le taux (débit) de variation de la propriété B du système est égale au taux de variation de B de VDC plus (+) le flux résultant de B à travers la surface de contrôle (SDC)

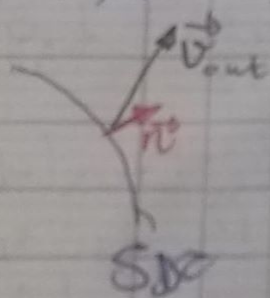
C'est une relation qui relie les variations de la propriété B du système (Lagrange) au variations de B en passant par la surface de contrôle de VDC (Euler)

Dans, cet exemple on a une seule sortie
"se la propriété B_{out} et une seule entrée
 B_{in} . Dans le cas general on peut avoir une
infinite d'accès de surface infinitesimale dA

$$B_{resulte} = \int \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA = B_{cv}$$

Remarque

Le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{n}$ est positif
quand le flux sort du VDC par SDC car
le vecteur vitesse et le vecteur unitaire sont
tous les deux dirigés vers l'exterieur



Ce produit est negatif lorsque le fluide
entre dans le VDC où le vecteur vitesse
est dirigé vers l'interieur donc oppose au
vecteur unitaire qui est toujours dirigé vers
l'exterieur

comme
Finalement le RTT (Reynolds Transport Theorem) s'écrit, comme peut paraître, pour un VDC fixe

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b \, dV + \int_{CS} \rho b \vec{U} \cdot \vec{n} \, dA$$

CV: Contrôle Volume $\equiv$ VDC

CS: Contrôle Surface $\equiv$ SDC

Etablissement des équations de Conservation à partir du RTT

I Conservation de masse (Eq de continuité)

$$\rho = m \rightarrow b = \frac{m}{m} = 1$$

$$\text{RTT} \rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho \, dV + \int_{CS} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \, dA$$

II Conservation de quantité de mouvement

$$B = mv \rightarrow b = \frac{mv}{m} = v$$

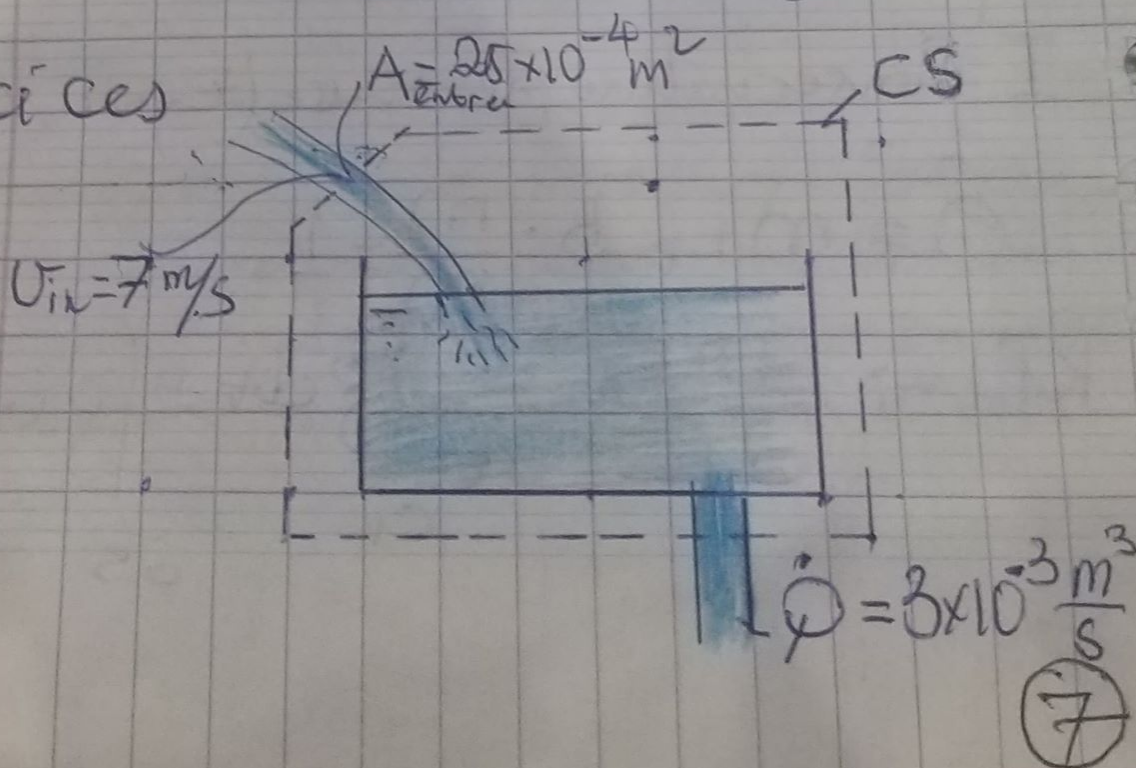
$$RTT \Rightarrow \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho v dv + \int_{CS} \rho v v_s dA$$

III Conservation d'énergie

$$B = E = me \rightarrow b = e$$

$$RTT \Rightarrow \frac{d(E)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} g e dv + \int_{CS} g e v dA$$

Exercices
Ex 1



⑦

Exem:

Un jet d'eau de section $25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ verse dans un réservoir avec une vitesse de 7 m/s . Le réservoir alimente l'extérieur à raison de $0.003 \text{ m}^3/\text{s}$. Trouver le taux d'accumulation (évacuation) dans/du réservoir. Voir schéma.

41. Solution

Un contrôle de volume est tracé autour du réservoir comme s'est montré sur la figure ci-dessus. Il y a une seule entrée et une seule sortie.

1. Écrire R.T.T. et analyser ses 3 termes pour le cas présent

2. Calculer l'accumulation ou l'évacuation.

Dans ce cas on quantifie l'eau qui entre dans le réservoir et une autre qui sort. Si le débit entrant est plus grand que le débit sortant (connu) il y a accumulation, si les deux débits sont égaux le niveau d'eau dans le réservoir reste constant, si le débit entrant est plus petit que le débit sortant le niveau d'eau dans le réservoir baisse. Comme le débit sortant est connu le problème revient à

Calcul du débit entrant.

Le problème est simple on peut le résoudre sans avoir recours à RIT mais il nous sert à fixer nos idées sur l'application du théorème et sur le rôle de chaque terme dans l'expression du RIT.

$$\text{RIT} \rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V g b dV + \int_{CS} g b v n dA$$

$$B = m \rightarrow b = \frac{m}{V} = 1$$

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad \text{conservation de la masse}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V g dV = 0 \quad \text{pas de sources ou de puits intrinsèques (propres au réservoir)}$$

$$\int_{CS} g v n dA = g v \int_{CS} dA = g v n (A_{\text{entrée}}) + \dot{Q}_c$$

$$v n = -U = -7 \text{ m/s}$$

$$g = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$-\frac{1000 \times 7 \times 2.5 \times 10^{-3}}{17.5 \text{ kg/s}} + \dot{\rho} = 0$$

$$\dot{\rho} = 1000 \times 0.003 = 3 \text{ kg/s}$$

$$\text{donc } \int_{CS} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 17.5 - 3 = 14.5 \text{ kg/s}$$

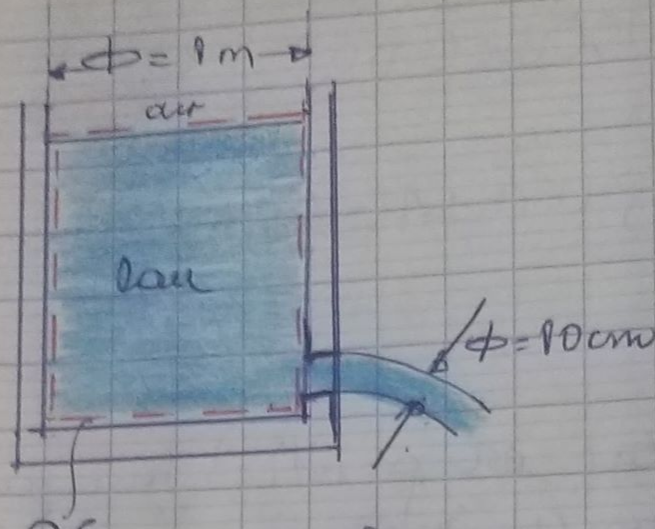
Le résultat est positif une partie de l'eau reste dans le réservoir il y a accumulation. Le niveau monte.

Ex 2:

De l'eau coule par une ouverture d'un réservoir cylindrique. Soit la vitesse de sortie de l'eau est de $\sqrt{2gh}$ m/s où h est la profondeur de l'ouverture dans la paroi du cylindre.

Calculer le temps nécessaire pour que le niveau de l'eau chute de 2 m à 0.5 m.

$\rho_{\text{cyl}} = 1 \text{ m}$; le jet de sortie a un diamètre de 10 cm



$$\text{LTI} \Rightarrow \frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \rho b \, dV + \int_{\text{CS}} \rho b \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA$$

$$\rho = m \quad b = 1$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dm}{dt} = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \rho \, dV + \int_{\text{CS}} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA \quad (\square)$$

$$\rho = \text{const}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} A_{cyl} dh$$

$$= \rho A_{cyl} \frac{dh}{dt}$$

$$\int \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \rho v_{sortie} A_{jet} = \rho \sqrt{2gh} A_j$$

$$\sqrt{2gh} A_j = A_{cyl} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{A_j}{A_{cyl}} dt = \frac{dh}{\sqrt{2g} h^{1/2}}$$

$$\frac{A_j}{A_{cyl}} \sqrt{2g} dt = \frac{dh}{h^{1/2}} = h^{-1/2} dh$$

$$\frac{A_j}{A_{cyl}} \sqrt{2g} \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{h_1}^{h_2} h^{-1/2} dh$$

$$\frac{A_j}{A_{cyl}} \sqrt{2g} (t_2 - t_1) = h^{1/2} \Big|_2^{0.5}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{(\sqrt{0.5} - \sqrt{2})}{\sqrt{2g}} \frac{A_{cyl}}{A_j} = 31.9s$$