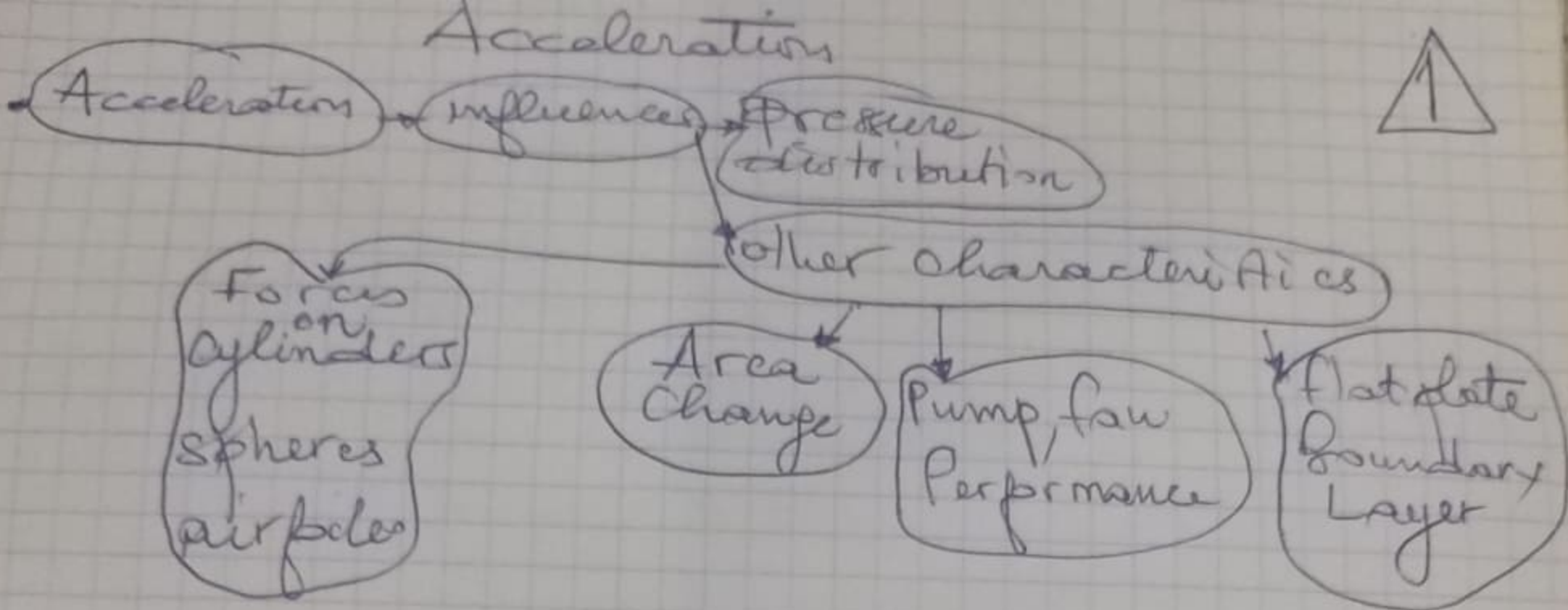


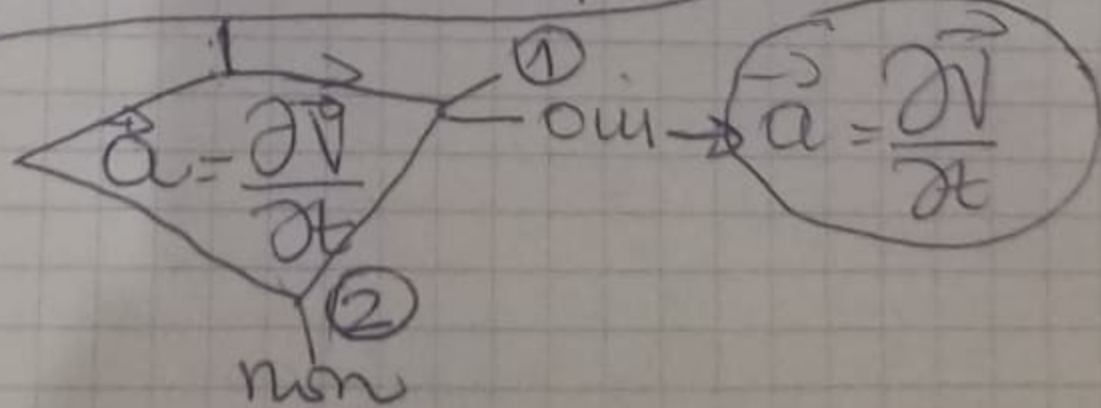


Acceleration (suite)

Quelle est la relation entre l'accélération $a(x, t)$ et le champ de vitesse

Comment cette relation est-elle exprimée mathématiquement

On pense automatiquement que l'accélération est la dérivée partielle de la vitesse par rapport au temps!



①



Non

Pourquoi?

$\frac{\partial V}{\partial t}$ est la
Vitesse en un
point

Pour un écoulement
permanent la
vitesse = const en ce point
à le point considéré

donc

$$V_{\text{point}}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Mais ce n'est pas
le cas

Fig 1: une masse
d'eau dans un tube
droit, chute, on
suit la trappe.

donc

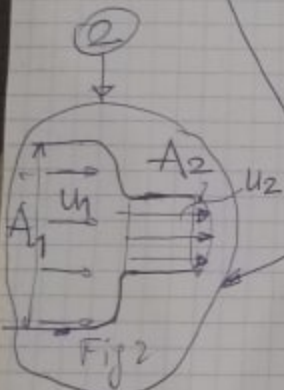
La vitesse est une
fonction du temps

① est vrai → car

on le suit

Lagrange

Le fluid est
considéré comme
un corps solide en chute



$$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}(t)$$

Fig 2: la même
masse d'eau passe par
un tube horizontal
dont la section varie
de A_1 à A_2



3

donc l'accélération doit
être calculée par suivant
le mouvement de la
particule fluide

en Amont, A_1 ,
en Aval A_2

en Amont U_1
en Aval U_2

$$\vec{U}_1 = U_1 \vec{e}_1$$
$$\vec{U}_2 = U_2 \vec{e}_2$$

en vertu de
conservation
de la masse

$$U_1 A_1 = U_2 A_2$$

$$U_1 < U_2$$

donc

le fluide accélère

$$A_1 > A_2$$

L'accélération de Euler au point
 X à l'instant t $\vec{a}(X, t)$
doit être identique à celle
de la particule de fluide
localisée au point X

Alors?

comme l'écoulement
est considéré permanent
la dérivée de la vitesse en un
point doit être nulle!

?

Cette accélération est elle
donnée par la dérivée de
vitesse par rapport au
temps?

③

pour faire, cela
on utilise la définition
de la dérivée pour
calculer $\vec{a}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U_{\text{nouvelle}} - U_{\text{ancienne}}}{\Delta t}$$

pendant l'intervalle de temps Δt
la particule de fluide passe de (x_1, t)
à $(x_2, t + \Delta t)$ Fig 3.

$$x_1 \equiv (x, y, z, t)$$

$$x_2 \equiv (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{U}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) - \vec{U}(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

Les projections de cette équation sur les
3 axes de coordonnées donnent

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

Utilisons l'expansion des séries de Taylor pour
calculer, cette limite

E.S.T

E.S.T. $\rightarrow u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) = u(x, y, z, t) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \right) + \dots$



$$U_{\text{ancienne}} = u(x, y, z, t)$$

 (x, y, z)

trajectoire de la
particule du fluide

 $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$

$$U_{\text{nouvelle}} = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$$

Fig 3: Variation de
la vitesse pour une
particule de fluide
et sa trajectoire

④

④ La distance Δx est la composante du vecteur déplacement le changement de position de la particule fluide pendant l'intervalle de temps Δt

$$\Delta x = u \Delta t$$

est négligeable

L'estimation devient exacte si $\Delta t \rightarrow 0$

aussi

$$\Delta y = v \Delta t$$

$$\Delta z = w \Delta t$$

donc $(\because)$ EST = ?

$$EST = u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t) = u(x, y, z, t) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \right)$$

$$\frac{EST - u(x, y, z, t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

Quand $\Delta t \rightarrow 0$

MG est l'accélération selon l'axe des $x \rightarrow a_x$

$$EST_{\Delta t \rightarrow 0} = a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

donc

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

MG : membre gauche de l'équation

un composant de l'accélération est présente comme la somme des termes de la dérivée temporelle $\frac{\partial}{\partial t}$ et spatiale $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

5



En mécanique des fluides on utilise le symbole $\frac{D}{Dt}$ pour représenter la somme des dérivées

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = \vec{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = \nabla$$

6

6
Généralement on écrit a_x, a_y, a_z , comme suit

$$a_x = \frac{Du}{Dt}, \quad a_y = \frac{Dv}{Dt} \text{ et } a_z = \frac{Dw}{Dt}$$

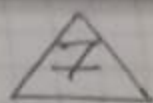
$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

$a_L = \frac{\partial u}{\partial t}$, c'est la dérivée partielle de la vitesse par rapport au temps (locale)
 $a = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u$ est la dérivée partielle de la vitesse le long de la trajectoire (convective)

locale : ce qui se passe en un point sur un intervalle de temps
convective : ce qui se passe sur le chemin entre deux positions de t à $t + \Delta t$ de la particule fluide

Exercice 1



Un champ de vitesses est donné par $\vec{u}$

$$\vec{u} = \alpha x \vec{i} + \beta y \vec{j} - (\alpha + \beta) z \vec{k}$$

où α, β sont des constantes de dimension t^{-1}

Quelle est l'accélération dans cet écoulement.

Hint: $u =$

$$v = \beta y$$

$$w = -(\alpha + \beta)z$$

Calculer a_x, a_y et a_z

$$\text{Rep: } a_x = \alpha^2 x, \quad a_y = \beta^2 y \quad \text{et} \quad a_z = (\alpha + \beta)^2 z$$

Exercice 2

Soit le champ de vitesse suivant

$$\vec{u} = 5x \vec{i} + 8y \vec{j} - (13)z \vec{k}$$

Calculer la force exercée par une particule de fluide de masse 1 unité de masse (u.m)

Derivée Substantielle

$$\frac{D(\quad)}{Dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})(\quad)$$

(8)

Ce qui entre entre parenthèse peut être une propriété du fluide ou de l'écoulement.

Une propriété du fluide peut être sa densité sa température, sa concentration etc.

Une propriété de l'écoulement peut être son vecteur déplacement, sa vitesse linéaire ou de rotation.

Si cette propriété est désignée par ϵ on a

$$\begin{aligned} \frac{D(\epsilon)}{Dt} &= \frac{\partial(\epsilon)}{\partial t} + u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \epsilon \end{aligned}$$

On remarque ici que le taux de variation ou le débit est donné par la dérivée du temps $\frac{\partial \epsilon}{\partial t}$ et la dérivée de l'espace $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \epsilon$, la dérivée convective. rappelez-vous le transfert de chaleur par convection se fait par le déplacement du fluide qui transporte la chaleur ou la