TD (Propriétés Importantes)

Ce TD est déstiné aux étudiants de 2^e année licence mines
$(Maths\ 4)$

April 24, 2020

Exercice 1 *Montrer que les racines du polynôme* $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$ *vérifiant* $|z| < 1$ *sont exactement* 50.

Solution
posons $Q(z) = 3z^{50} + z^{111}$, on a
$|Q(z)| = |z^{50}(z^{61} + 3)| < |z^{61} + 3| \geq 2$ pour $|z| = 1$.
D'autre part,
$|P(z) - Q(z)| = 1 < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$,
d'après le théorème de Rouché P, Q ont le même nombre de zéros dans $\mathcal{D}(0,1)$.

Exercice 2 *Considérons les fonctions* $f(z) = z^{16} + \frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{6}z^2$ *et* $g(z) = e^z - 4z^n + 1$, $k(z) = e^{-z} - 2z^2 - 1$.
Combien de zéros contient f , g, k *à l'intérieur du disque unité* $|z| < 1$*?*

Solution
1) Posons $h(z) = z^{16}$
il est clair que h a 16 zéros à l'intérieur du disque unité, on a
$|h(z)| = |z^{16}| = |z|^{16} = 1$ pour $|z| = 1$.
D'autre part,
$|f(z) - h(z)| = |\frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{6}z^2| = \frac{2}{3} < 1 = |h(z)|$ pour $|z| = 1$,
d'après le théorème de Rouché f, h ont le même nombre de zéros dans $\mathcal{D}(0,1)$.
2) Posons $h(z) = 4z^n$

il est clair que h a n zéros à l'intérieur du disque unité, on a
$|h(z)| = |4z^n| = 4|z|^n = 4$ pour $|z| = 1$.
D'autre part,
$|g(z) - h(z)| = |e^z + 1| \leq e + 1 < 4 = |h(z)|$ pour $|z| = 1$,
d'après le théorème de Rouché g, h ont le même nombre de zéros dans $\mathcal{D}(0, 1)$.

3) Posons $h(z) = -2z^2$
il est clair que h a 2 zéros à l'intérieur du disque unité, on a
$|h(z)| = | - 2z^2| = 2|z|^2 = 2$ pour $|z| = 1$.
D'autre part,
$|k(z) - h(z)| = |e^{-z} - 1| \leq e^{-1} + 1 < 2 = |h(z)|$ pour $|z| = 1$,
d'après le théorème de Rouché k, h ont le même nombre de zéros dans $\mathcal{D}(0, 1)$.

Exercice 3 *Considérons les fonctions* $f(z) = z^5 + 3z^2 + 1$.
Combien de zéros contient f *dans l'anneau* $1 < |z| < 2$?

Solution
On cherche à l'intérieur des disques $|z| < 1$ et $|z| < 2$ séparément.
En effet,
· Pour $|z| = 1$,
Posons $h(z) = 3z^2$
il est clair que h a 2 zéros à l'intérieur du disque unité, on a
$|h(z)| = |3z^2| = 3|z|^2 = 3$ pour $|z| = 1$.
D'autre part,
$|f(z) - h(z)| = |z^5 + 1| = 2 < 3 = |h(z)|$ pour $|z| = 1$,
d'après le théorème de Rouché f, h ont le même nombre de zéros dans $\mathcal{D}(0, 1)$.
· Pour $|z| = 2$,
Posons $h(z) = z^5$
il est clair que h a 5 zéros à l'intérieur du disque unité, on a
$|h(z)| = |z^5| = |z|^5 = 32$ pour $|z| = 2$.
D'autre part,
$|f(z) - h(z)| = |3z^2 + 1| = 13 < 32 = |h(z)|$ pour $|z| = 2$,
d'après le théorème de Rouché f, h ont le même nombre de zéros dans $\mathcal{D}(0, 2)$.

Exercice 4 *Let* $f(z) = z^7 + z(z-3)^3 + 1$.

Trouver le nombre de zéros de f *dans le disque* $\mathcal{D}(3,1)$.

Solution

$\mathcal{D}(3,1) = \{z \in \mathbb{C} \diagup |z-3| < 1\}$

C'est mieux de travailler dans le disque unité

Posons $w = z - 3$

donc $f(w) = (w+3)^7 + w^4 + 3w^3 + 1$, $|w| < 1$.

Posons $h(w) = (w+3)^7$

il est clair que h n'a pas de zéros pour $|w| = 1$, on a

$|h(w)| = |(w+3)^7| = |w+3|^7 = 4^7$.

D'autre part,

$|f(w) - h(w)| = |w^4 + 3w^3 + 1| = 5 < 4^7 = |h(w)|$ pour $|z| = 1$,

d'après le théorème de Rouché f, h ont le même nombre de zéros dans $\mathcal{D}(3,1)$

D'où

f n'a pas de zéros dans le disque $\mathcal{D}\left(3,1\right)$.