

Propriétés Importantes des F. Holomorphes

Ce cours est destiné aux étudiants de 2^e année licence mines
(*Maths 4*)

April 24, 2020

Les résultats concernant la théorie des fonctions holomorphes d'une ou plusieurs variables complexes sont très nombreux.

Les connaissances pour aborder à ce cours sont plutôt modestes. En ce qui concerne la topologie, il suffit de connaître les propriétés élémentaires telles que des ensembles compacts et connexes de $\mathbb{C}$, etc.

1 Définitions et notions de base

Tout d'abord, on fait quelques rappels concernant la topologie sur le plan complexe.

Definition 1 1. Une partie $E \subset \mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ si pour tout $z \in E$ il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset E$.

2. Une partie $F \subset \mathbb{C}$ est un fermé de $\mathbb{C}$ si et seulement si son complémentaire dans $\mathbb{C}$ est ouvert.

Definition 2 La frontière d'un ensemble A est constituée des points qui sont situés au bord de cet ensemble, c'est-à-dire qui peuvent être approchés à la fois par l'intérieur et l'extérieur de cet ensemble, et notée par ∂A .

Proposition 3 Soit $K \subset \mathbb{C}$, alors K est compact si et seulement si K est une partie fermée et bornée.

Definition 4 Un chemin γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, définie sur un segment compact $[\alpha, \beta]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si de plus, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, on dit que γ est un chemin fermé.

2 Propriétés

On va présenter trois résultats célèbres, le théorème de Liouville, le principe du maximum et le théorème de Rouché.

Definition 5 *Une fonction entière est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.*

Theorem 6 (Théorème de Liouville) *Toute fonction entière bornée est constante.*

Example 7 *Montrons que tout polynôme à coefficients complexes non constant possède au moins une racine.*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré strictement supérieur à 1.

Montrons par contraposée, supposons que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C}$.

Donc la fonction $\frac{1}{P(z)}$ est alors holomorphe dans $\mathbb{C}$ et bornée puisque $\frac{1}{P(z)}$ tend vers 0 quand $|z| \rightarrow +\infty$, elle est donc constante par le Théorème de Liouville.

Definition 8 *Soient E un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction sur $\mathbb{C}$, on dit que f a un maximum en $z_0 \in E$, s'il existe un voisinage V de z_0 dans E tel que*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \text{ pour tout } z \in V.$$

Le principe du maximum exprime que le module d'une fonction holomorphe ne peut pas admettre un maximum local. On peut l'énoncer comme suit.

Proposition 9 (Principe du maximum (local)) *Soit f une fonction holomorphe dans ouvert connexe E . S'il existe $z_0 \in E$ et $r > 0$ tels que, pour tout z appartenant au disque centré en z_0 et de rayon r , on ait*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \text{ pour tout } z \in \mathcal{D}(z_0, r).$$

alors f est constante dans E .

Autrement dit, si f est holomorphe sur E et $|f|$ a un maximum local en un point $z_0 \in E$, alors f est constante sur E .

Proposition 10 (Principe du maximum (global)) Soit f une fonction holomorphe dans ouvert connexe borné E , continue dans E . Soit $M = \sup_{z \in \partial E} |f(z)|$. Alors

1. Pour tout $z \in E$ on a $|f(z)| \leq M$.
2. S'il existe $a \in E$ tel que $|f(a)| = M$ alors f est constante.

Exemple 11 Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq \frac{1}{n}$, pour $z = n$, $n > 1$.

Montrer que f est identiquement nulle.

Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ avec $f(z) \neq 0$ et notons $\alpha = |f(z)| > 0$.

Si $n > 1$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$, alors le principe du maximum affirme que

$$|f(z)| < \frac{1}{n} < \alpha, \quad \text{pour tout } z < n,$$

contradiction.

Proposition 12 (Théorème de Rouché) Soient E un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{K}$ un compact à bord orienté contenu dans E et f et g deux fonctions holomorphes dans E .

Si

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| < |g(z)|, \quad z \in \partial \mathcal{K}$$

(auquel cas f et g ne s'annulent pas sur $\partial \mathcal{K}$), les fonction f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans l'intérieur de $\mathcal{K}$.

Exemple 13 Soit la fonction $f(z) = z^6 + 7z^4 + 2$.

On cherche le nombre de zéros de f dans le disque $|z| < 1$?

Posons $h(z) = 7z^4$,

il est clair que h a 4 zéros à l'intérieur du disque unité, on a

$$|h(z)| = |7z^4| = 7|z|^4 = 7 \text{ pour } |z| = 1.$$

D'autre part,

$$|f(z) - h(z)| = |z^6 + 2| = 3 < 7 = |h(z)| \text{ pour } |z| = 1,$$

d'après le théorème de Rouché f , h ont le même nombre de zéros dans

$\mathcal{D}(0, 1)$.