U.B.M Annaba - Département de mathématiques-L3
Introduction aux Processus aléatoires -TD3-suite
Vecteurs aléatoires

Par A. Redjil - Avril 2020

Exercice 7

Considérons n variables aléatoires $X_1,\ X_2, ...,\ X_n$ indépendantes et de loi respectivement $N(m_1, \sigma_1^2), N(m_2, \sigma_2^2), ..., N(m_n, \sigma_n^2)$.
Pour tout $i = 1, 2, ..., n$, la densité de la variable aléatoire X_i est définie par:

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m_i}{\sigma_i}\right)^2\right)$$

- Montrer que l'on peut écrire la densité du vecteur de $\mathbb{R}^n$: $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{pmatrix}$,de la forme :

$$f_X(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \frac{1}{\sqrt{\det\left(\Gamma_X\right)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - m\right)' \Gamma_X^{-1}\left(x - m\right)\right)$$

avec: u' est la transposée du vecteur u, m et Γ_X sont respectivement le vecteur des espérances et la matrice de covariance du vecteur aléatoire X.

Exercice 8

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, où X_1 et X_2 sont des variables de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Posons $Z = X_1 + X_2$
(a) Trouver la loi du couple(X_2, Z) et celle de X_2 sachant que $[Z = z]$.
(b) En déduire $E(X_2|[Z = z])$ et $E(X_2|Z)$.

Exercice 9

Soit un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est définie dans le tableau ci dessous:

X/Y	1	2	3	4
1	0	0	0	0.3
2	0.2	0	0	0
3	0	0	0.1	0
4	0.3	0.1	0	0

a- Déterminer les lois marginales de ce couple.
b- Les lois de X et Y sont-elles indépendantes?
c- Calculer la covariance du couple (X, Y) .
d- Déterminer les lois conditionnelles de X sachant que $Y = 2$ et de Y sachant que $X \in \{1, 4\}$.
e- Déterminer la loi de la variable aléatoire $E(X|Y)$.
f- Calculer $E(E(X|Y))$ et comparer à $E(X)$.

Exercice 10

Soit $p \in]0, 1]$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $U = min(X, Y)$ et
$V = max(X, Y)$.
a- Déterminer la loi du couple (U, V) .
b- Déterminer les lois marginales.
c- Déterminer la loi de $Z = U + V$.