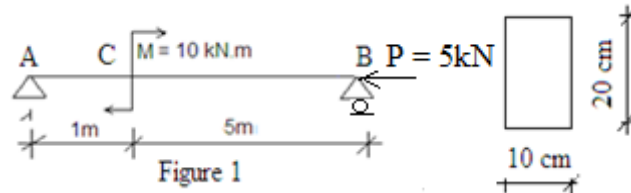


UNIVERSITE BADJI-MOKHTAR ANNABA
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE-CIVIL
3^{ème} Licence Génie Civil S6

SERIE N°1 ENERGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION

EXERCICE N° 1

Soit la poutre suivante (Figure 1)



1. Calculer l'énergie potentielle de déformation totale de la poutre
2. Comparer les énergies potentielles dues au moment fléchissant et aux efforts tranchant. Quelle conclusion en tirez-vous ?

AN : $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ $G = 0,8 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ $k = \frac{6}{5}$ (coef de section réduite pour une section rectangulaire)

EXERCICE N°2:

Soit la structure de la figure 2.

- 1 En appliquant le théorème de Castigliano, déterminer le déplacement horizontal en E δ_{EH}
- 2 Déterminer la rotation θ_E en E en appliquant les intégrales de Mohr
- 3 Calculer le déplacement vertical δ_{EVe} en E, par la méthode graphique de Véréchaguine
- 4 Calculer le déplacement horizontal δ_{HC} en C en utilisant la multiplication des diagrammes par les tableaux de Mohr

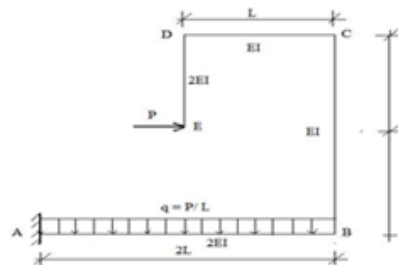


Figure 2

EXERCICE N° 3 : Soit la structure ci-dessous figure 3

1. Déterminer le déplacement horizontal en B δ_{HB}

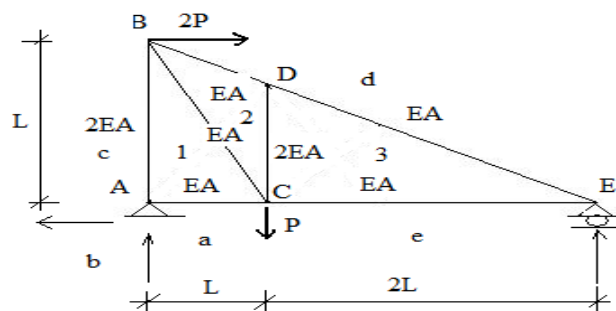
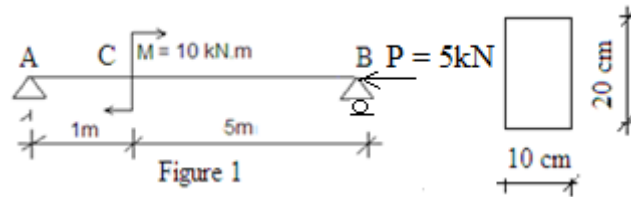


Figure 3

Solution série N°1 énergie potentielle de déformation

EXERCICE N° 1



1. Calculer l'énergie potentielle de déformation totale de la poutre

$$U_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{N_i^2}{(2EA)_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_i^2}{(2EI)_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{kT_i^2}{(2GA)_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_{ti}^2}{(2GI)_{Pi}} dx$$

• Calcul des réactions d'appui

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x = 0 &\Rightarrow H_A = P = 5 \text{ kN} \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow R_A \cdot 6 + M = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{M}{6} = -1,67 \text{ kN} \\ \sum \vec{F}_y = 0 &\Rightarrow R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_B = -R_A = 1,67 \text{ kN} \end{aligned}$$

Tronçon AB : $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$\begin{aligned} N_{AC} = -H_A &= -5 \text{ kN} \Rightarrow N_{AC}^2 = 25 \text{ kN}^2 \\ M_{AC} = R_A x &= -1,67x \Rightarrow M_{AC}^2 = 2,78 x^2 \\ T_{AC} = R_A &= -1,67 \text{ kN} \Rightarrow T_{AC}^2 = 2,78 \text{ kN}^2 \end{aligned}$$

Tronçon CB : $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$\begin{aligned} N_{BC} = -P &= -5 \text{ kN} \Rightarrow N_{BC}^2 = 25 \text{ kN}^2 \\ M_{CB} = R_B x &= 1,67x \Rightarrow M_{CB}^2 = 2,78 x^2 \\ T_{CB} = -R_B &= -1,67 \text{ kN} \Rightarrow T_{CB}^2 = 2,78 \text{ kN}^2 \end{aligned}$$

• Calcul des caractéristiques géométriques

$$A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 ; I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,1 \cdot 0,2^3}{12} = 6,667 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 \text{ et } G = 0,8 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$U_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{N_i^2}{(2EA)_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_i^2}{(2EI)_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{kT_i^2}{(2GA)_i} dx$$

$$U_{\text{totN}} = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{N_i^2}{(2EA)_i} dx = \int_0^1 \frac{25}{2EA} dx + \int_0^5 \frac{25}{2EA} dx = 1,785 \cdot 10^{-5} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$U_{\text{totM}} = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_i^2}{(2EI)_i} dx = \int_0^1 \frac{2,78 x^2}{2EI} dx + \int_0^5 \frac{2,78 x^2}{2EI} dx$$

$$U_{\text{totM}} = \frac{2,78}{2EI} \left[\frac{1}{3} + \frac{125}{3} \right] = 4,17 \cdot 10^{-3} \text{ kNm}$$

$$U_{\text{totT}} = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{kT_i^2}{(2GA)_i} dx$$

$$U_{\text{totT}} = \int_0^1 \frac{16 \cdot 2,78}{5 \cdot 2GA} dx + \int_0^5 \frac{56 \cdot 2,78}{5 \cdot 2GA} dx = +0,0000104 + 0,000052125 = 0,0000625 \text{ kNm}$$

$$U_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_i^2}{(2EI)_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{kT_i^2}{(2GA)_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{N_i^2}{(2EA)_i} dx =$$

$$U_{\text{tot}} = 1.785 \cdot 10^{-5} + 4.17 \cdot 10^{-3} + 6,25 \cdot 10^{-5} = 0,00425 \text{ kNm}$$

On peut conclure que les énergies potentielles de déformation dues à l'effort tranchant et l'effort normal sont négligeables

par rapport à celle du moment fléchissant.

EXERCICE N°2 :

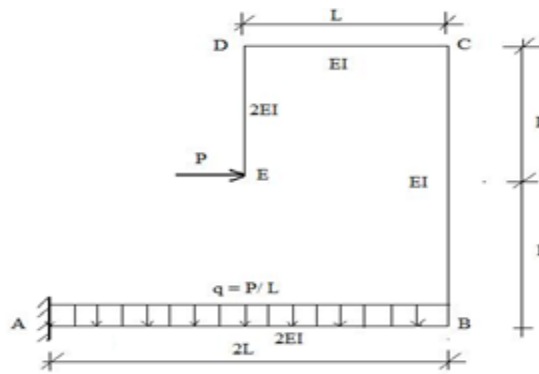


Figure 1

1. **Détermination du déplacement horizontal en E δ_{EH} en appliquant le théorème de Castigliano.**

Le théorème de Castigliano s'énonce comme suit : *La dérivée partielle de l'énergie potentielle de déformation d'une structure ou d'un corps solide par rapport à une force est égale au déplacement du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action.*

On néglige les énergies potentielles dues aux efforts tranchant et aux efforts normaux

$$\delta_{EH} = \frac{\partial U}{\partial P} = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_i}{(EI)_i} \frac{\partial M_i}{\partial P} dx$$

Ce portique présente quatre tronçons, en l'occurrence, les tronçons AB, BC, CD et DE.

Tronçon ED : $0 \leq x \leq L$

$$M_{ED} = -Px \Rightarrow \frac{\partial M_{ED}}{\partial P} = -x$$

Tronçon DC : $0 \leq x \leq L$

$$M_{DC} = -PL \Rightarrow \frac{\partial M_{DC}}{\partial P} = -L$$

Tronçon CB : $0 \leq x \leq 2L$

$$M_{CB} = -P(L-x) \Rightarrow \frac{\partial M_{CB}}{\partial P} = -(L-x)$$

Tronçon BA : $0 \leq x \leq 2L$

$$M_{BA} = -PL - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial M_{BA}}{\partial P} = -L - \frac{x^2}{2L}$$

$$\delta_{EH} = \frac{1}{2EI} \int_0^L Px^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^L (PL^2) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L [P(L-x)^2] dx + \frac{1}{2EI} \int_0^{2L} PL^2 + P \frac{x^2}{2} dx$$

$$\delta_{EH} = \frac{PL^3}{6EI} + \frac{PL^3}{EI} + \frac{2PL^3}{3EI} + \frac{5PL^3}{3EI} = \frac{7PL^3}{2EI} \text{ (Même sens que la charge)}$$

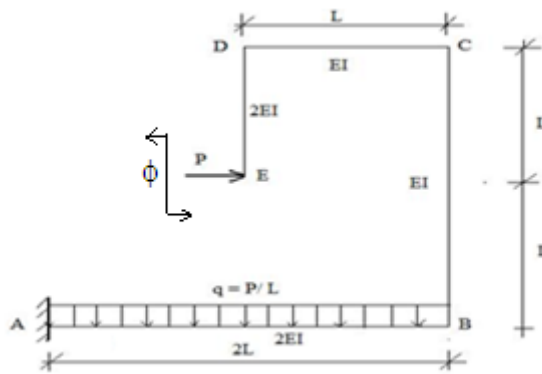
2. Détermination de la rotation θ_E en E en appliquant les intégrales de Mohr

On applique d'abord un moment fictif ϕ en E puis on calcule la rotation θ_E en dérivant l'énergie potentielle totale de la structure par rapport à ce moment fictif ϕ , et faisant $\phi=0$ dans les intégrales de Mohr, on obtient alors l'expression permettant de calculer la rotation θ_E .

L'énergie potentielle de déformation est donnée par :

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_i^2}{(2EI)_i}$$

$$\theta_E = \frac{\partial U}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_i}{(EI)_i} \frac{\partial M_i}{\partial \phi}$$



Tronçon ED : $0 \leq x \leq L$

$$M_{ED} = -Px - \phi \Rightarrow \frac{\partial M_{ED}}{\partial \phi} = -1$$

Tronçon DC : $0 \leq x \leq L$

$$M_{DC} = -PL - \phi \Rightarrow \frac{\partial M_{DC}}{\partial \phi} = -1$$

Tronçon CB : $0 \leq x \leq 2L$

$$M_{CB} = -P(L-x) - \phi \Rightarrow \frac{\partial M_{CB}}{\partial \phi} = -1$$

Tronçon BA : $0 \leq x \leq 2L$

$$M_{BA} = -PL - \frac{qx^2}{2} + \phi \Rightarrow \frac{\partial M_{BA}}{\partial \phi} = 1$$

$$\theta_E = \frac{\partial U}{\partial \phi} (\phi=0) = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px)(-1) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L (-PL)(-1) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L [-P(L-x)(-1)] dx + \frac{1}{2EI} \int_0^{2L} (-PL - \frac{qx^2}{2}) dx$$

$$\theta_E = \frac{1}{2EI} \int_0^L (Px) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L PL dx + \frac{1}{EI} \int_0^L [P(L-x)] dx + \frac{1}{2EI} \int_0^{2L} (-PL - \frac{Px^2}{2}) dx$$

$$\theta_E = -\frac{5}{12EI} PL^2 \text{ (rotation dans le sens inverse de } \phi)$$

3. Calcul du déplacement vertical δ_{EV} en E, par la méthode graphique de Véréchaguine

Si la barre est à section constante ($EI = \text{constante}$)

Supposons que l'on doive intégrer le produit deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, respectivement non linéaire et linéaire.

$$I = \int f_1(x) f_2(x) dx = \int f_1(x) (ax + b) dx = a \int x f_1(x) dx + b \int f_1(x) dx = a x_G A_1 + b A_1$$

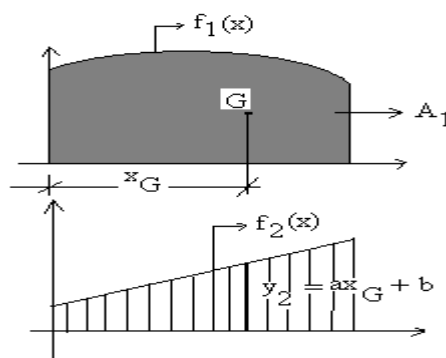
Donc : **$I = A_1(ax_G + b) = A_1 y_2$**

A_1 : Aire de la fonction non linéaire

y_2 = ordonnée mesuré sur le diagramme de la fonction linéaire au niveau du centre de gravité du diagramme de la fonction non linéaire

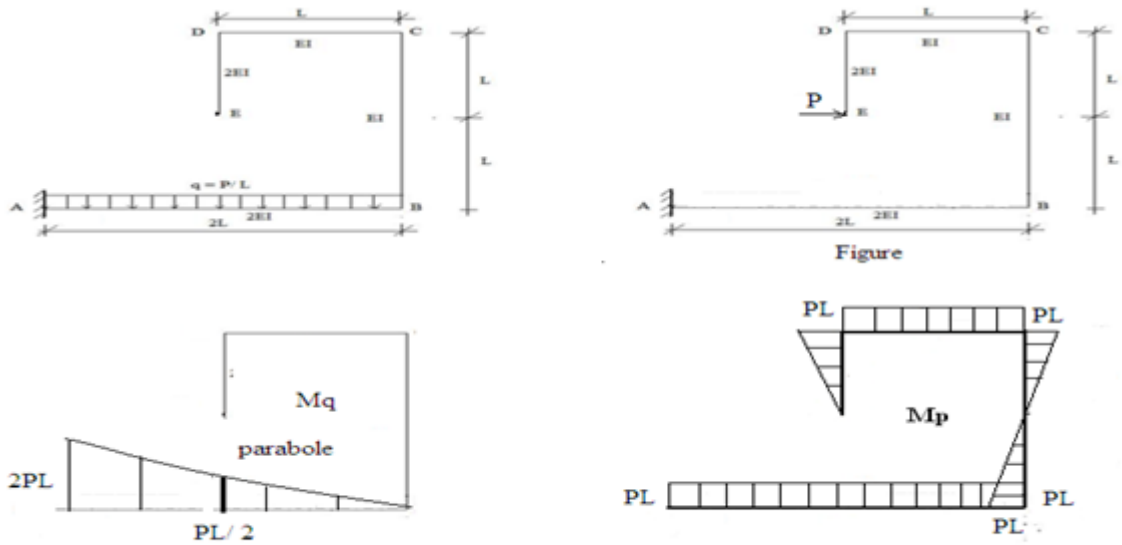
Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

L'intégrale du produit de deux fonctions, dont l'une est linéaire est égal au produit de l'aire de l'épure non linéaire par l'ordonnée de son centre de gravité mesurée sur l'épure linéaire.

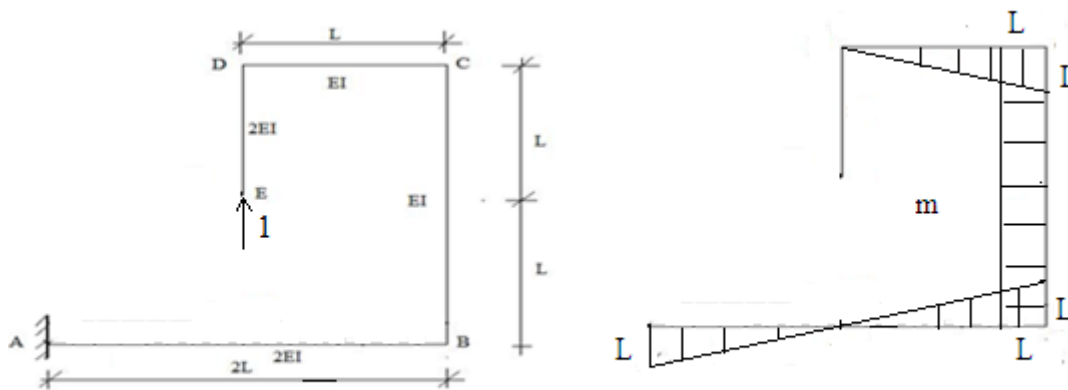


- Donc on a besoin d'un diagramme unitaire et d'un diagramme de charge, or dans le but de simplifier les calculs et en vertu du principe de superposition, on trace autant de diagramme de charge dus au moment fléchissant que de charges appliquée sur la structure.
- Dans ce cas précis on a deux charges appliquées sur le portique, donc il est impératif de tracer deux diagrammes du moment fléchissant dus au chargement appliqués, en l'occurrence, les charges P et q

Les diagrammes :



Diagrammes de charge



diagrammes unitaire

$\delta_{EV} = \delta_{EVP} + \delta_{Evq}$ (principe de superposition \Rightarrow la somme des déplacements dus à la charge P et la charge répartie q)

$$\delta_{EVP} = -\frac{1}{EI} (PL L) \left(\frac{1}{2}L\right) + 0 + 0 = -\frac{PL^3}{2EI} \quad (\text{le produit du diagramme de P } M_p \text{ par le diagramme unitaire m})$$

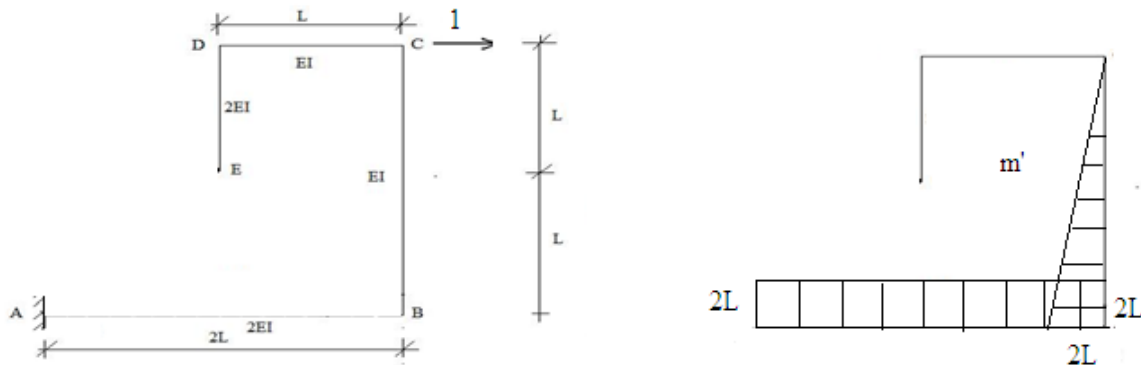
$$\delta_{Evq} = \frac{1}{2EI} [A_{\text{parabole}} y_{\text{linéaire}}] \quad (\text{le produit du diagramme de q } M_q \text{ par le diagramme unitaire m})$$

$$\delta_{Evq} = \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{1}{3} \frac{PL}{2} L\right) \left(\frac{1}{4}L\right) \right] - \frac{1}{2EI} \left[\left(\left(\frac{PL}{2}L\right) \frac{L}{2} + \left(\frac{1}{3} \frac{3PL}{2} L\right) \frac{3L}{4} \right) \right] = -\frac{7}{24EI} PL^3$$

$$\delta_{EV} = \left(-\frac{PL^3}{2EI} - \frac{7}{24EI} PL^3\right) = -\frac{19PL^3}{24EI} \quad (\text{dirigé vers le bas}) \quad (\text{sens inverse de la charge unitaire})$$

4. Calcul du déplacement horizontal δ_{HC} en C en utilisant la multiplication des diagrammes par les tableaux de Mohr

- Il s'agit en fait de trouver graphiquement le résultat des intégrales de Mohr.
Les diagrammes de charge étant déjà tracés pour le compte de la 3^{ème} question
Il ne manque que le diagramme unitaire du à une charge appliquée horizontalement en C



$\delta_{CH} = \delta_{CHP} + \delta_{CHq}$ (principe de superposition \Rightarrow la somme des déplacements dus à la charge P et la charge répartie q)

$$\delta_{CHP} = \left(-\frac{L}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot PL \cdot L\right) + \frac{L}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot PL(L + 2 \cdot 2L) + \frac{2L}{2EI} \cdot 2L \cdot PL = \frac{8PL^3}{3EI}$$

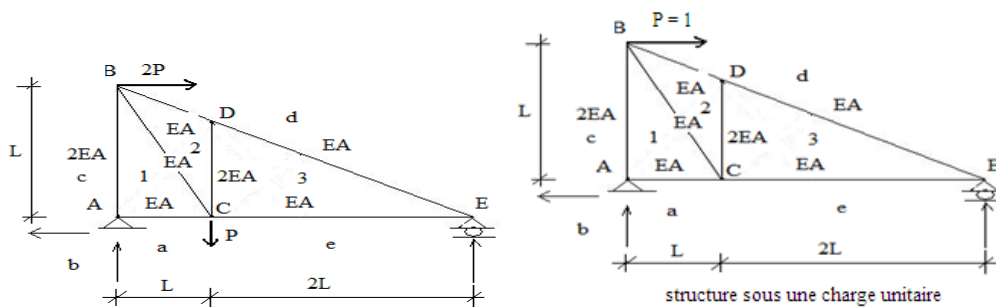
$$\delta_{CHq} = \frac{2L}{2EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2PL \cdot 2L = \frac{4PL^3}{3EI}$$

$$\delta_{CH} = \frac{4PL^3}{EI} \text{ (dirigé vers la droite)}$$

EXERCICE N° 3 :

- Détermination du déplacement horizontal en B δ_{HB}

$$\delta_{HB} = \sum \frac{N_{ij} n_{ij} L_{ij}}{EA_{ij}}$$



N_{ij} : effort normal dans barre ij du au chargement appliqué

n_{ij} : effort normal dans barre ij du à une charge unitaire appliqué au point et suivant la direction

L_{ij} : longueur de la barre ij

EA_{ij} : rigidité à l'effort normale de la barre ij

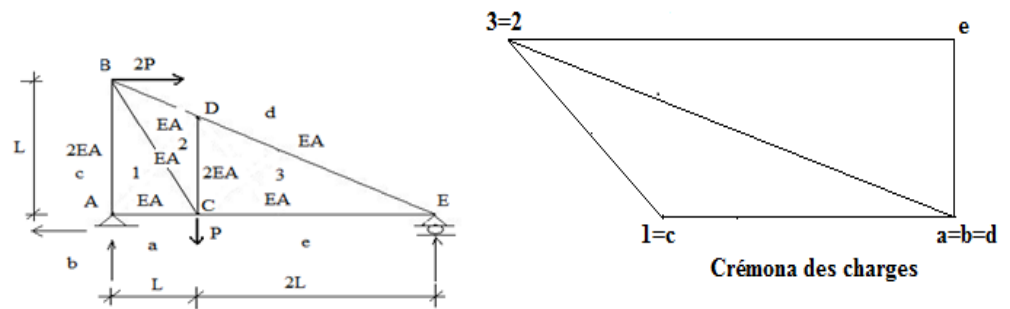
Calcul des réactions

- Calcul des réactions du treillis sous chargement

$$\sum F_x = -H_A + 2P = 0 \Rightarrow H_A = 2P$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 3L - P \cdot 2L + 2P \cdot L = 0 \Rightarrow R_A = 0$$

$$\sum F_y = R_A + R_B = P \Rightarrow R_B = P$$

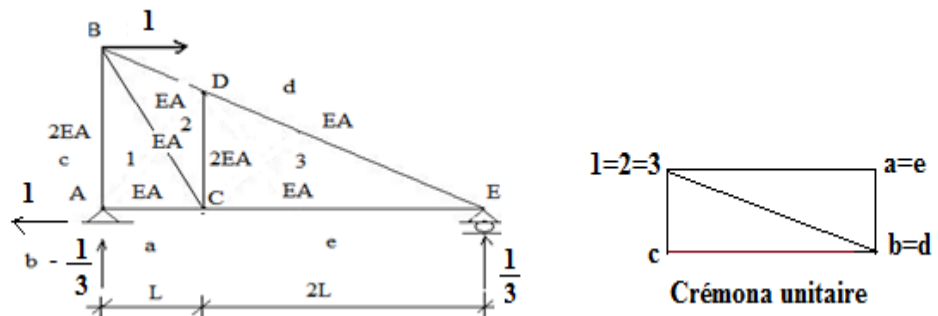


- Calcul des réactions du treillis sous charge unitaire

$$\sum F_x = H_A - 1 = 0 \Rightarrow H_A = 1$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 3L + 1 \cdot L = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{1}{3}$$

$$\sum F_y = R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_B = -R_A = \frac{1}{3}$$



- Les efforts dans les barres sont calculés par la méthode graphique de Cremona (Figures ci-dessus)

| Barres | N_{ij} | n_{ij} | L_{ij} | EA_{ij} | $\frac{N_{ij}n_{ij}L_{ij}}{EA_{ij}}$ |
|---|----------|----------|----------|-----------|--|
| AB=C1 | 0 | 0,333 | L | 2EA | 0 |
| AC=1a | 2P | 1 | L | EA | $\frac{2PL}{EA}$ |
| BC=21 | 1,425 P | 0 | 1,414 L | EA | 0 |
| BD=d2 | -3,175 P | -1,08 | 1,054 L | EA | $\frac{3,61PL}{EA}$ |
| DE =d3 | -3,175 P | -1,08 | 2,108 L | EA | $\frac{7,22PL}{EA}$ |
| DC= 32 | 0 | 0 | 0,666 L | 2EA | 0 |
| CE=e3 | 3P | 1 | 2L | EA | $\frac{6PL}{EA}$ |
| $\sum \frac{N_{ij}n_{ij}L_{ij}}{EA_{ij}}$ | | | | | $\delta_{HB} = \frac{18,83PL}{EA}$ Vers la droite (même sens que la charge unitaire) |

