

Département de Génie Mécanique – Université Badji Mokhtar  
Annaba

Cours **Méthode des volumes finis** pour les étudiants de  
**Master I - Énergétique**

Responsable du module: Dr **F. MECHIGHEL**

# Chapitre 4 La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion

## 4.1 Introduction

Dans les problèmes d'écoulement des fluides, une attention particulière doit être portée aux effets de la convection qui seront d'autant plus importants que la vitesse est élevée. En effet, dans des situations pratiques, la diffusion d'une quantité de transport  $\phi$  s'accompagne généralement de sa convection; il est donc nécessaire d'étudier le problème couplé de diffusion-convection. L'équation de convection-diffusion stationnaire peut être dérivée de l'équation de transport étudiée dans le [chapitre 2](#) pour une propriété générale «  $\phi$  » telle que :

$$\text{div}(\rho \mathbf{u} \phi) = \text{div}(\Gamma \text{ grad} \phi) + S_\phi \quad (4.1)$$

L'intégration de cette équation sur un volume de contrôle typique de volume  $V$  et de section transversale  $A$  (voir [Fig. 4.1](#)) conduit à l'équation de l'équilibre des flux à travers le volume de contrôle suivante :

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad} \phi) dA + \int_V S_\phi dV = 0 \quad (4.2)$$

Le côté gauche de cette équation représente le « flux convectif » *net* tandis que le côté comporte le « flux diffusif » net et le terme « génération » ou « absorption » de la propriété  $\phi$  dans le volume de contrôle (CV).

### Remarques 4.1

1- Le problème principal de la discrétisation des **termes convectifs** est le calcul de la valeur de la propriété transportée  $\phi$  aux faces du volume de contrôle et de son **flux convectif** à travers ces frontières. Dans le chapitre 3, nous avons présenté la méthode de **différenciation centrale** pour obtenir des équations discrétisées pour les termes de diffusion et de source sur le côté droit de l'équation (4.2). Évidemment, nous nous intéressons à cette pratique, qui fonctionne si bien pour

les problèmes de diffusion, au niveau convectif. Néanmoins, il convient de mentionner ici que le processus de diffusion affecte la distribution de la quantité transportée  $\phi$  le long de ses gradients dans toutes les directions, alors que les écarts de convection n'influencent que dans le sens de l'écoulement. Cette différence capitale apparaît dans une limite supérieure stricte de la taille du maillage, qui dépend de la force relative de convection et de diffusion, pour des calculs stables de convection-diffusion avec différenciation centrale.

2- Évidemment, nous mentionnons également (comme mentionné ci-dessous) le cas d'un certain nombre de pratiques de discrétisation alternatives pour les effets convectifs qui permettent des calculs stables dans des conditions moins restrictives.

3- Dans l'analyse actuelle, aucune référence ne sera faite à l'évaluation des vitesses faciales. En fait, on suppose qu'elles sont « en quelque sorte » connues. La méthode de calcul des vitesses sera discutée au [chapitre 5](#).

## 4.2 Convection-diffusion unidimensionnelle en régime stationnaire

### 4.2.1 Modèle mathématique

En l'absence de sources (champ de force externe), la convection et la diffusion en régime stationnaire d'une propriété  $\phi$  dans un champ d'écoulement unidimensionnel donné  $u$  est régie par :

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (4.3)$$

et

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (4.4)$$

## 4.2.2 Résolution du problème par la méthode des volumes finis

Rappelons que la méthode des volumes finis est basée sur les trois étapes suivantes :

### Étape 1: Génération de maillage

En nous référant à la notation introduite dans le [chapitre 3](#), considérons le volume de contrôle unidimensionnel typique montré dans la [figure 4.1](#). Comme indiqué au chapitre 3, notre attention se porte sur le nœud général  $P$  et ses nœuds voisins qui sont identifiés par  $W$  et  $E$  et les faces  $w$  et  $e$  de ce volume de contrôle.

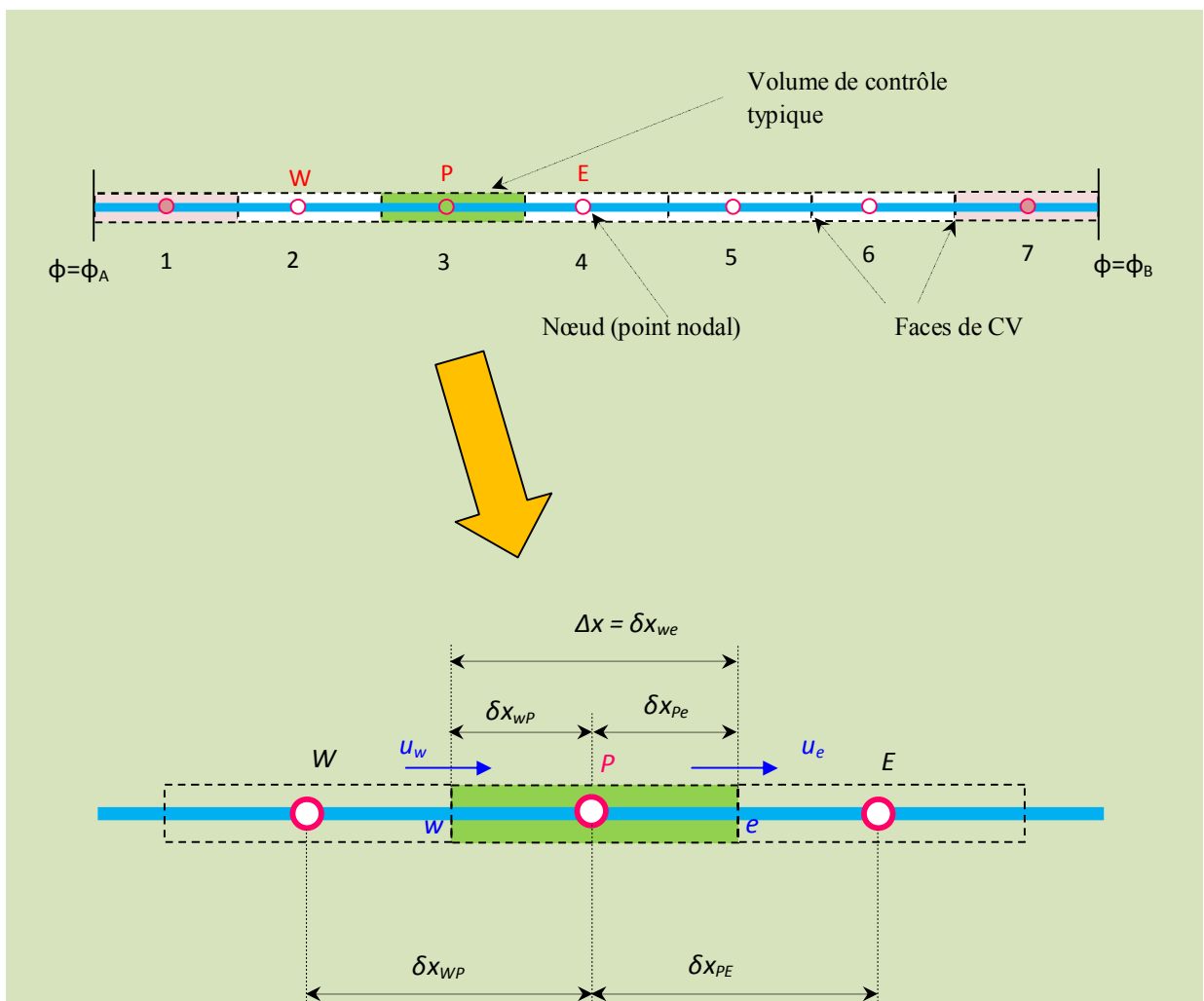


Figure 4.1 Volume de contrôle typique autour du nœud P

### Étape 2: Discrétisation

L'intégration de l'équation de transport (4.3) et l'intégration de l'équation de continuité (4.4) sur le volume de contrôle de la figure 4.1 conduisent respectivement aux équations suivantes:

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (4.5)$$

et

$$(\rho A \phi)_e - (\rho A \phi)_w = 0 \quad (4.6)$$

Pour obtenir des équations discrétisées pour le problème de convection – diffusion, nous devons approximer les termes de l'équation (4.5). Il est plus commode de définir deux variables  $F$  et  $D$  la première pour représenter le flux massique convectif par unité de surface et la seconde pour représenter la conductance de diffusion aux faces des cellules (volumes de contrôle). Ces deux variables sont définies comme suit :

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \Gamma / \delta x \quad (4.7)$$

Les valeurs faciales des cellules des variables F et D peuvent s'écrire

$$F_w = (\rho u)_w \quad \text{et} \quad F_e = (\rho u)_e \quad (4.8a)$$

et

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \quad \text{et} \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \quad (4.8b)$$

Pour simplifier, nous supposons que  $A_w = A_e = A$  et nous utilisons l'approche de différenciation centrale pour représenter la contribution des termes de diffusion sur le côté droit, l'équation intégrée (4.5) peut maintenant être écrite :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (4.9)$$

et l'équation de continuité intégrée (4.6) comme

$$F_e - F_w = 0 \quad (4.10)$$

Nous supposons également que le champ de vitesse est « en quelque sorte connu », ce qui prend en charge les valeurs de  $F_e$  et  $F_w$ . Afin de résoudre l'équation (4.9), nous devons calculer la propriété transportée  $\phi$  aux faces e et w. Bien qu'il existe de nombreux schémas à cet effet, par exemple : le schéma de différenciation hybride, le schéma de loi de puissance, les schémas de différenciation d'ordre supérieur pour les problèmes de convection-diffusion et les schémas TVD (schémas à Variation Totale Décroissante) etc. Cependant, dans ce cours, nous nous limitons au schéma de différenciation centrale. Pour de plus amples recherches, nous recommandons aux étudiants d'étudier ses schémas en réalisant des mini-projets.

### Le schéma de différenciation centrale

L'approximation de différenciation centrale a été utilisée pour représenter les termes de diffusion qui apparaissent sur le côté droit de l'équation (4.9) et il semble logique d'essayer l'interpolation linéaire pour calculer les valeurs de la face cellulaire pour les termes convectifs sur le côté gauche de cette équation. Pour un maillage uniforme, nous pouvons écrire les valeurs de face de cellule de la propriété  $\phi$  telles que :

$$\phi_e = \frac{(\phi_P + \phi_E)}{2} \quad \text{et} \quad \phi_w = \frac{(\phi_W + \phi_P)}{2} \quad (4.11)$$

En remplaçant les expressions (4.11) dans les termes de convectifs (4.9), on a

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (4.12)$$

Nous pouvons réorganiser cette équation et la mettre sous la forme

$$\left( \left( D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left( D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right) \phi_P = \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E$$

qui peut s'écrire comme

$$\left( \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right) \phi_P = \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (4.13)$$

En identifiant les coefficients de  $\phi_W$  et  $\phi_E$  comme  $a_W$  et  $a_E$  (voir chapitre 3), les expressions de **différenciation centrale** pour l'équation de convection-diffusion discrétisée sont :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (4.14a)$$

avec

$$\begin{cases} a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \\ a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \\ a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \end{cases} \quad (4.14b)$$

### Étape 3: Résolution du système d'équations discrétisées

Nous pouvons facilement remarquer que l'équation (4.14) pour le problème de convection-diffusion en régime stationnaire prend la même forme générale de l'équation (3.11) pour le problème de diffusion pure. La différence est que les coefficients  $a_P$ ,  $a_E$  et  $a_W$  dans la première équation contiennent des termes supplémentaires pour tenir compte de la convection. Pour résoudre le problème de convection-diffusion 1D, nous écrivons des équations discrétisées de la forme (4.14) pour tous les nœuds du maillage. Cela donne un système d'équations algébriques qui est résolu pour obtenir la distribution de la propriété transportée  $\phi$ . Nous verrons par la suite comment résoudre le système d'équations algébriques résultant (voir TD et TP).

### Références bibliographiques

1. S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, Washington, DC, 1980.
2. H.K. Versteeg, W. Malasasekera, "Introduction to Computational Fluid Dynamics: The finite volume method (2<sup>nd</sup> Edition)", Pearson, Prentice Hall, 2007.