Stabilité

TD N° 6

Exercice N° 1 : Etudier la stabilité d'après Bode et Nyquist du système dont la fonction de transfert est :

$$T_1(p) = \frac{K}{(1+\tau p)p} \quad \text{en boucle ouverte.}$$

Réponse :

Stabilité d'après Bode :

$$T_1(p) = \frac{K}{(1+\tau p)p} \Rightarrow T_1(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\tau\omega)}$$

$$|T_1(j\omega)| = \frac{K}{\omega(1+\tau^2\omega^2)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$20\log|T_1(j\omega)| = |T_1(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 20\log\omega - 10\log(1+\tau^2\omega^2)$$

fréquence de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

pour $\omega < \omega_c \Rightarrow |T_1(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 20\log\omega$

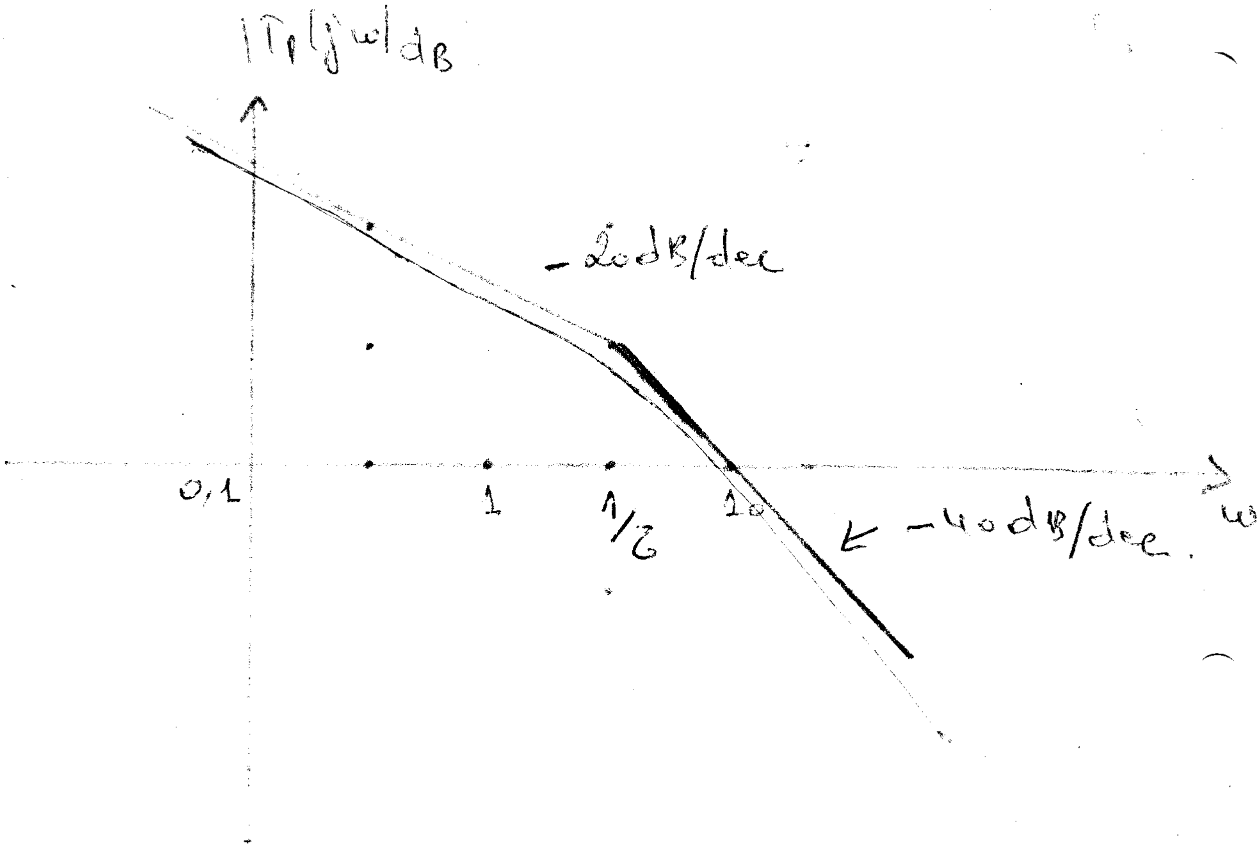
pour $\omega > \omega_c \Rightarrow |T_1(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 20\log\omega - 20\log\tau\omega \Rightarrow$

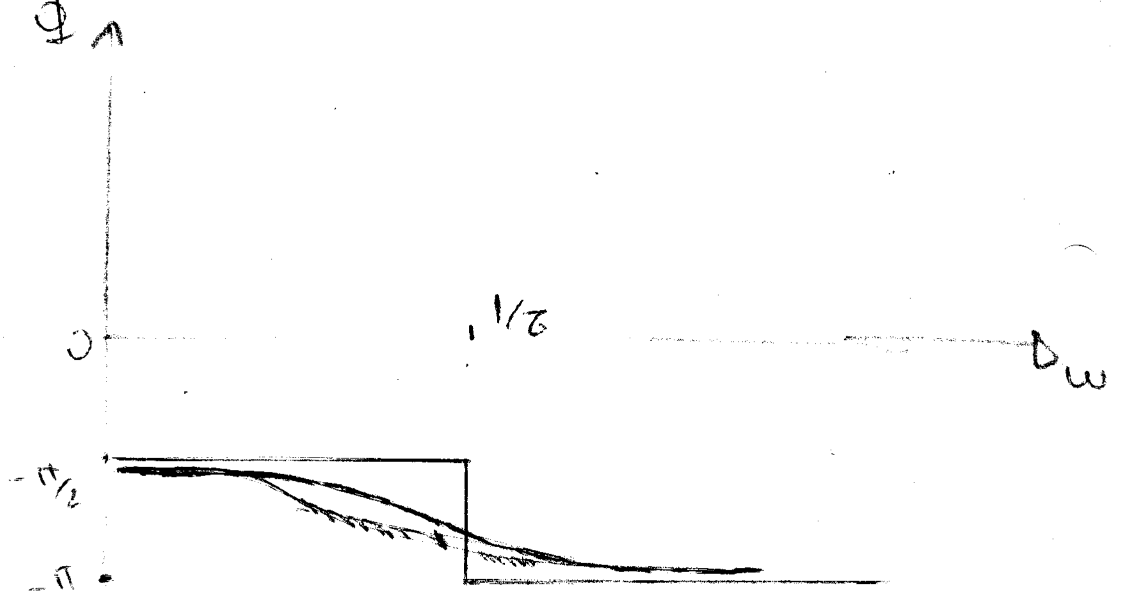
$$|T_1(j\omega)|_{dB} = 20\log\frac{K}{\tau} - 40\log\omega$$

pour la phase on a :

$$\Phi = -\text{arctg}\,\infty - \text{arctg}\,\omega\tau = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\,\omega\tau$$

Voir Tracé au verso.





donc pour $\varphi \to -\pi$ le gain est negatif d'où
le systeme est stable pour toutes valeurs de **K**.

stabilité d'après Nyquist.

$$T_1(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)} \Rightarrow T_1(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega\tau)}$$

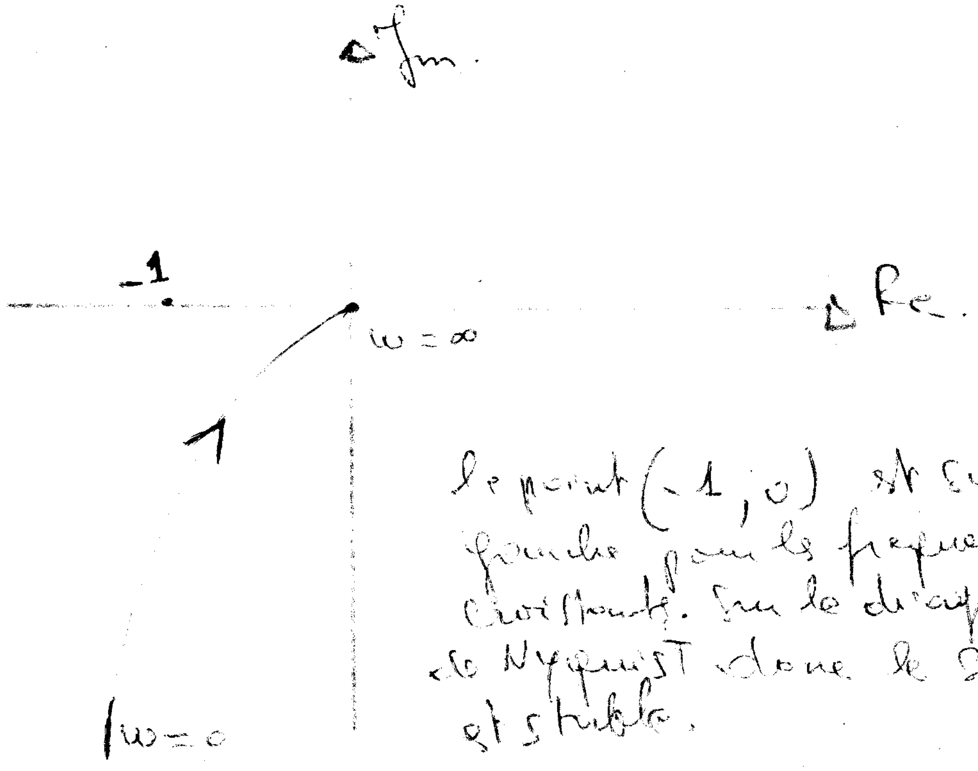
$$T_1(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2\tau + j\omega} = \frac{K(-\omega^2\tau - j\omega)}{(\omega^2\tau)^2 + \omega^2}$$

$$T_1(j\omega) = \frac{-K\omega\tau - jK}{\omega^3\tau^2 + \omega} = \frac{-K\tau}{\omega^2\tau^2+1} - j\frac{K}{\omega(1+\omega^2\tau^2)}$$

pour $\omega = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,T_1(j\omega) = -K\tau$
$\mathrm{Im}\,T_1(j\omega) = -\infty$

pour $\omega = \infty \Rightarrow \mathrm{Re}\,T_1(j\omega) = 0$
$\mathrm{Im}\,T_1(j\omega) = 0$

donc le diagramme de Nyquist sera.



le point (-1, 0) est sur la gauche pour les fréquences croissantes sur le diagramme de Nyquist donc le système est stable.

Exercice N°2

Etudier dans les plans de Bode et de Nyquist la stabilité du système ayant, comme fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T_2(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)(1+a\tau p)} \qquad \tau > 0 \quad a > 1$$

Réponse :

stabilité d'après bode :

$$|T_2(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 20\log \omega - 20\log(1+\tau^2\omega^2)^{1/2}$$
$$- 20\log(1+a^2\tau^2\omega^2)^{1/2}$$

les fréquences de coupures sont :

$\omega_{c_1} = \frac{1}{a\tau}$ et $\omega_{c_2} = \frac{1}{\tau}$ avec $\omega_{c_1} < \omega_{c_2}$ car $a\tau > \tau$ car $a > 1$.

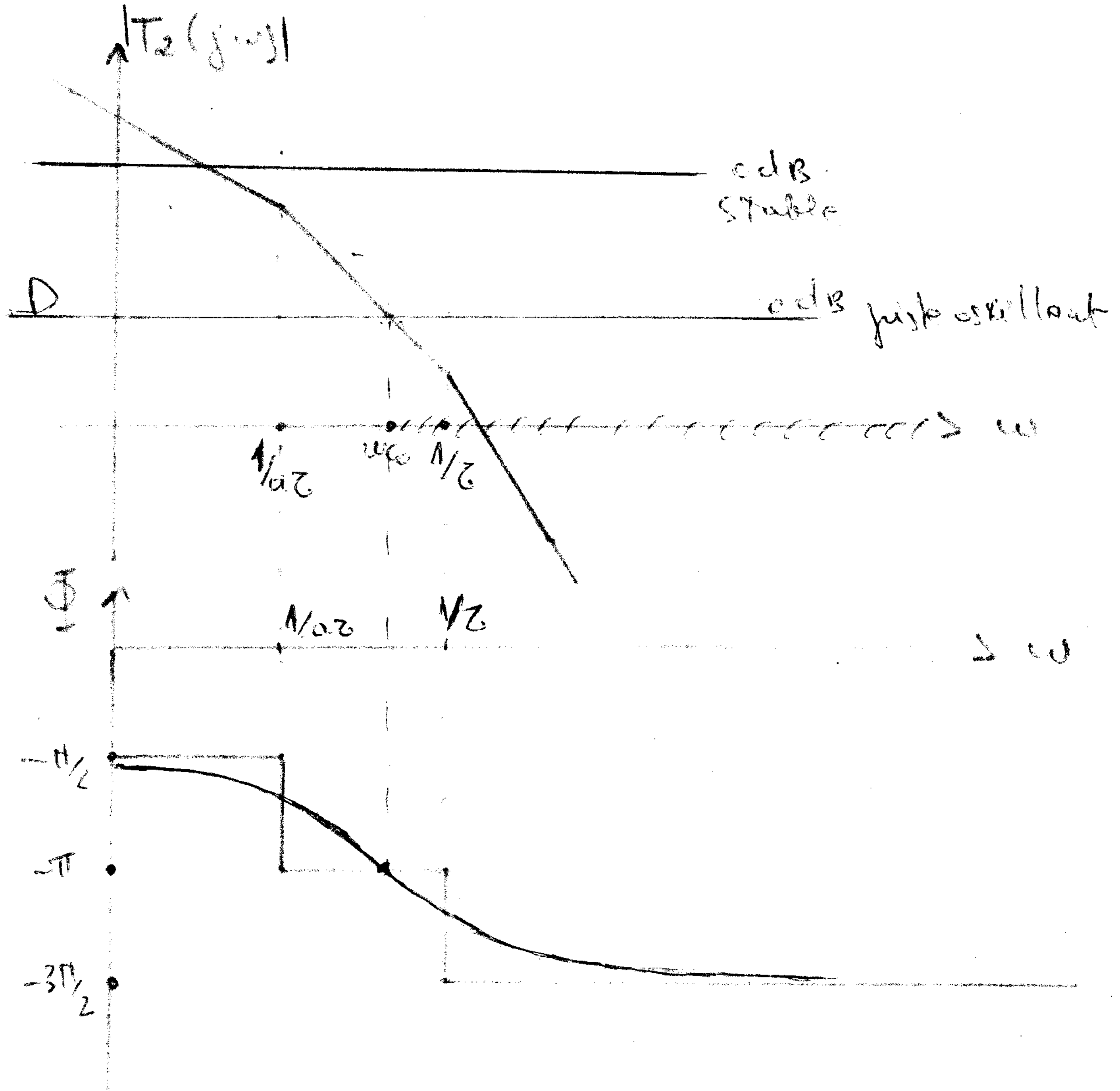
pour $\omega < \omega_{c_1} \Rightarrow |T_2(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 20\log \omega$

pour $\omega_{c_1} < \omega < \omega_{c_2} \Rightarrow |T_2(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 20\log a\tau$

$$- 40\log \omega = 20\log \frac{K}{a\tau} - 40\log \omega$$

pour $\omega > \omega_{c_2} \Rightarrow |T_2(j\omega)|_{dB} = 20\log \frac{K}{a\tau^2} - 60\log \omega$

Tracé de bode



Conclusion :

Le système est stable pour toutes les valeurs de K si l'axe de 0 dB est pris au dessus de la droite D

Le système est juste oscillant si l'axe de 0 dB est confondu avec D

Le système est instable pour toutes les valeurs de K si l'axe des 0 dB est au dessous de D

calcul de ω_{co} ?
cette fréquence correspond à :

$$|T_2(j\omega_{co})|_{dB} = 0 \Rightarrow 0 = 20\log\frac{K}{a\tau} - 40\log\omega_{co}$$

PARALLÈLE

$$\Phi(\omega_{co}) = -\pi/2 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - \arctg\tau\omega_{co} - \arctg a\tau\omega_{co}$$

$$\Rightarrow \log\frac{K}{a\tau^2} = 3\log\omega_{co}$$

$$\operatorname{tg}\tau\omega_{co} = -\operatorname{tg}a\tau\omega_{co}$$

$$\log\frac{K}{a\tau} = 2\log\omega_{co} \Rightarrow \frac{K}{a\tau} = \omega_{co}^2 \Rightarrow$$

$$\omega_{co} = \sqrt{\frac{K}{a\tau}} \quad \text{pour } K = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \omega_{co} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

<u>stabilité d'après Nyquist :</u>

$$T_2(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+ja\tau\omega)(1+j\tau\omega)}$$

$$= \frac{K}{(-a\tau\omega^2 + j\omega)(1+j\tau\omega)}$$

$$= \frac{K}{-a\tau\omega^2 - \tau\omega^2 + j(\omega - a\tau^2\omega^3)}$$

$$= \frac{-K}{\tau\omega^2(1+a) + j\omega(a\tau^2\omega^2 - 1)}$$

$$T_2(j\omega) = \frac{-K\left[\tau\omega^2(1+a) - j\omega(a\tau^2\omega^2-1)\right]}{\left[\tau\omega^2(1+a)\right]^2 + \left[\omega(a\tau^2\omega^2-1)\right]^2}$$

$$T_2(j\omega) = -\frac{K\tau\omega^2(1+a)}{\underbrace{\left[\tau\omega^2(1+a)\right]^2+\left[\omega(a\tau^2\omega^2-1)\right]^2}_{D}} + \frac{jK\omega(a\tau^2\omega^2-1)}{D}$$

donc :

pour $\omega = 0$ $\quad Re\, T_2(j\omega) = -K\tau(1+a)$

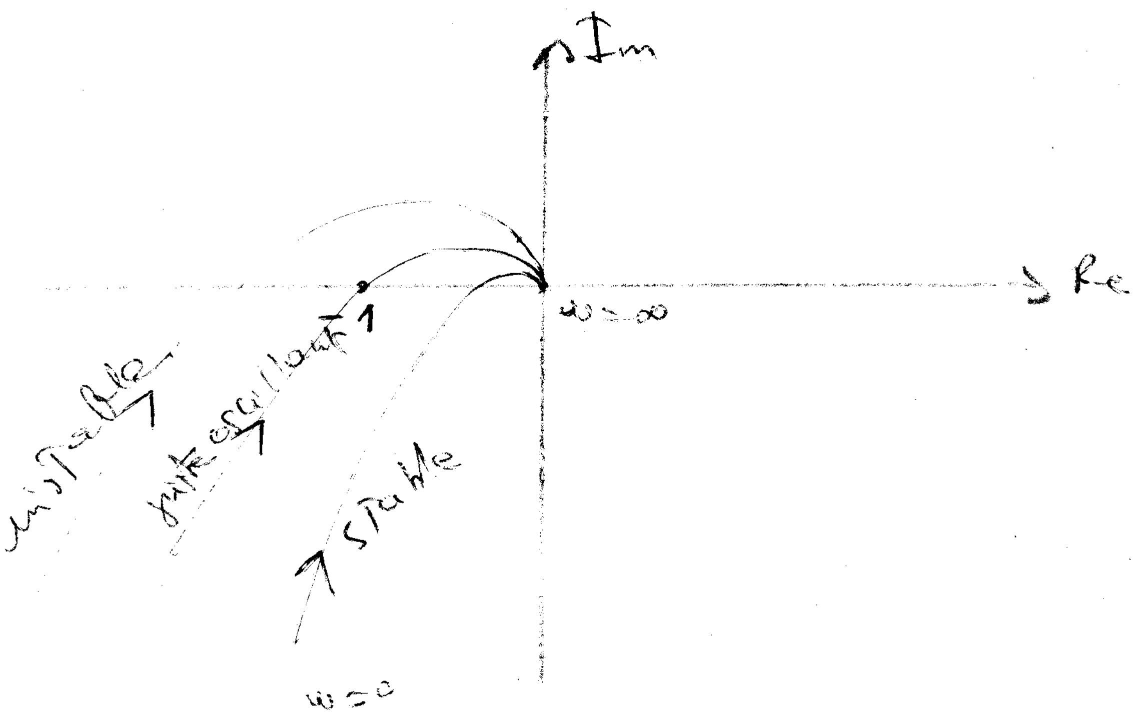
$Im\, T_2(j\omega) = -\infty$

pour $\omega = \infty$ $\quad Re\, T_2(j\omega) = 0^-$

$Im\, T_2(j\omega) = 0^+$

la partie imaginaire est nulle pour $\omega = \frac{1}{\tau\sqrt{a}} \Rightarrow$ $Re\, T_2(j\omega) = f(K)$ $\forall K \Rightarrow$ $\exists K$ tel que $f(K) < -1$

donc dans le plan de Nyquist on aura :



Exercice N°=3 : Étudier, dans le plan de Bode et de Nyquist la stabilité du système ayant comme fonction de transfert en boucle ouverte l'expression.

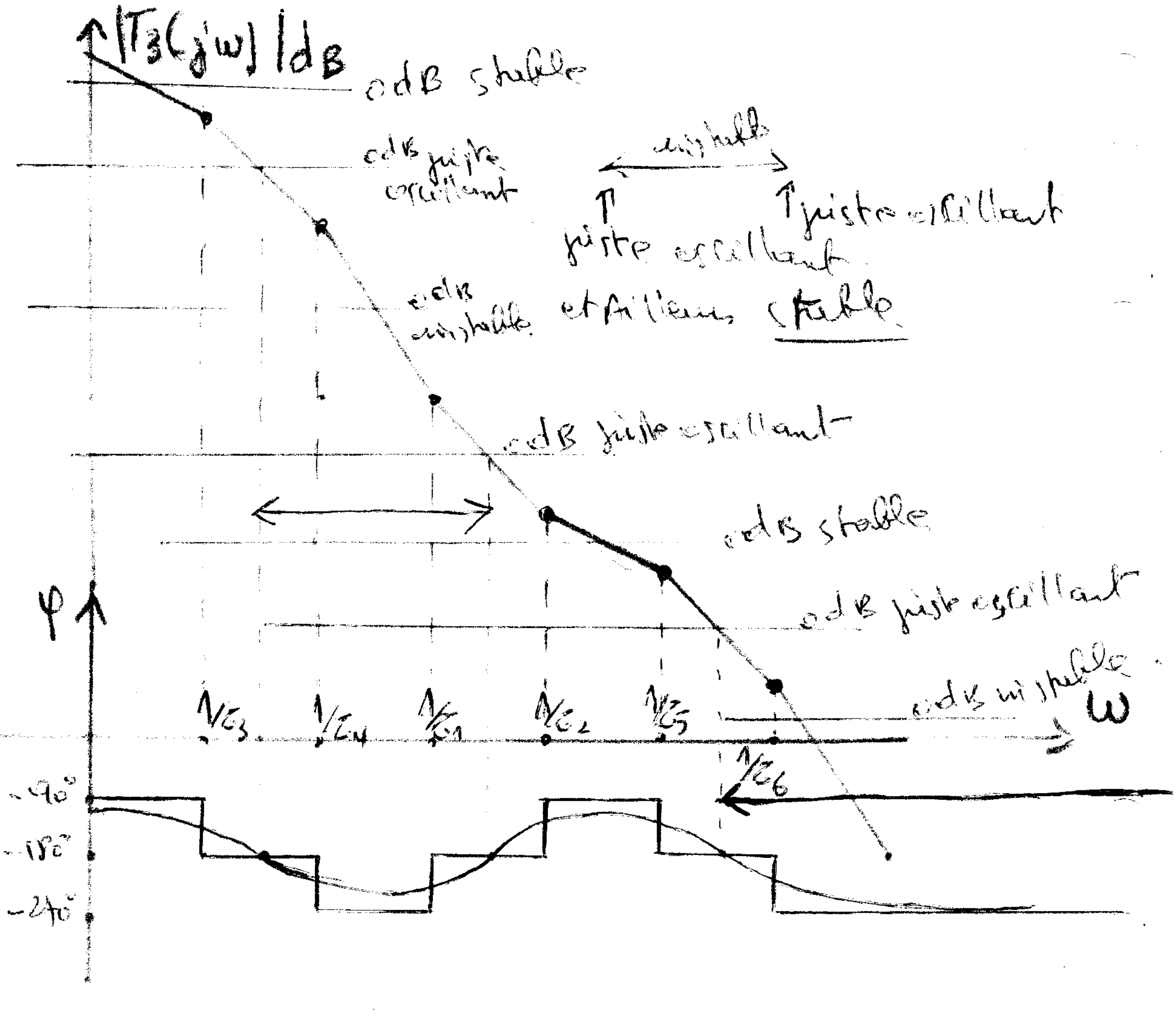
$$T_3(p) = \frac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p(1+\tau_3 p)(1+\tau_4 p)(1+\tau_5 p)(1+\tau_6 p)}$$

avec $\tau_3 > \tau_4 > \tau_1 > \tau_2 > \tau_5 > \tau_6 > 0$

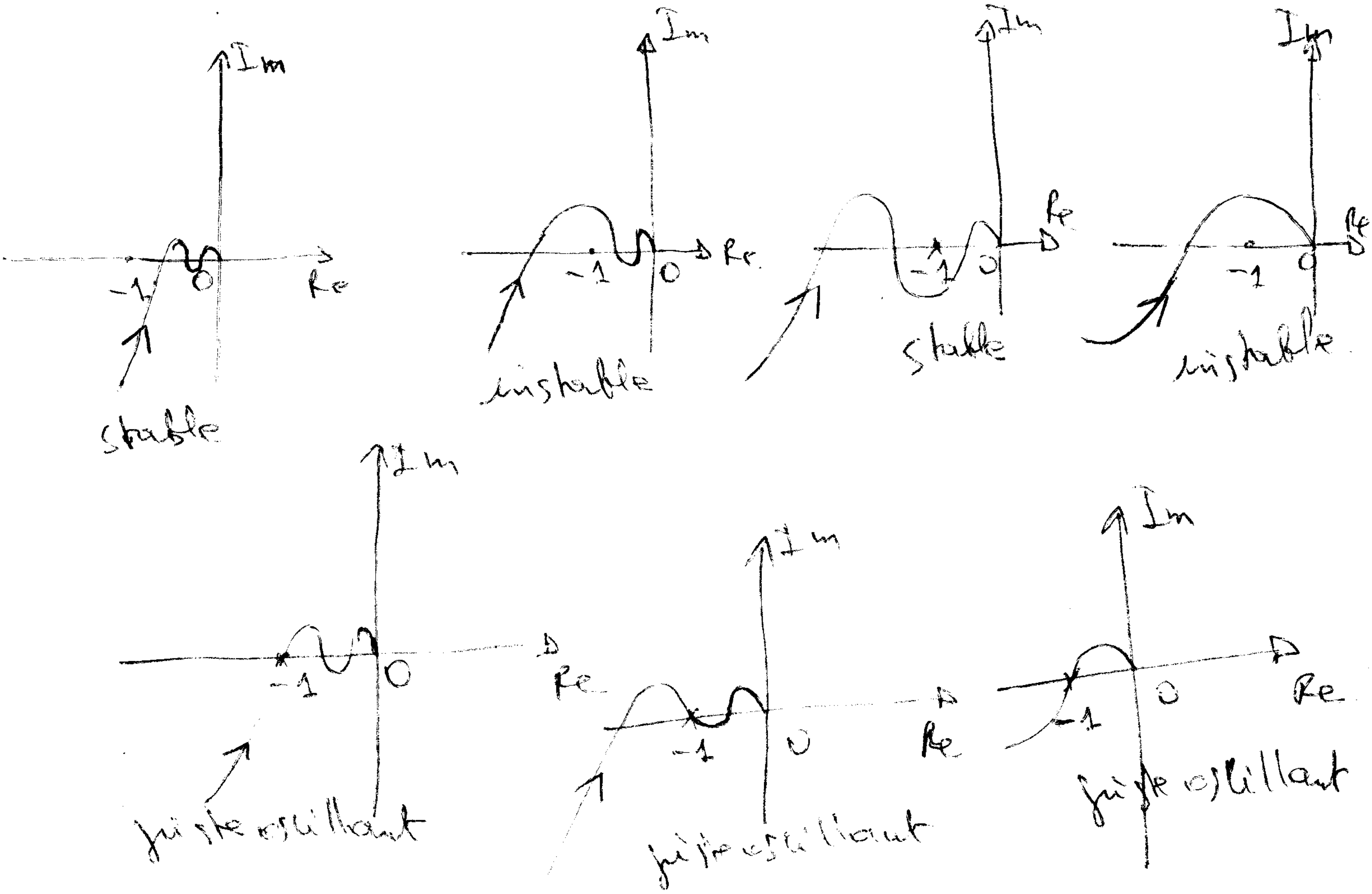
Solution :

dans le plan de bode on aura :

$$\frac{1}{\tau_3} < \frac{1}{\tau_4} < \frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_2} < \frac{1}{\tau_5} < \frac{1}{\tau_6}$$



dans le plan de Nyquist on aura pour des valeurs croissantes de K les diagrammes suivants: (5)



~~cett~~ la stabilité dépend de K dans ce cas donc c'est une stabilité conditionnelle.

Exercice N° 4 :

le système dont l'équation caractéristique est la suivante peut-il être stable ?

Équation caractéristique

$$1+T(p) = 3p^5+p^4+17p^3+6p^2+4p+8=0$$

Solution :

p^5	3	17	4
p^4	1	6	8
p^3	-1	-20	0
p^2	-14	8	0
p^1	$-\frac{144}{7}$	0	
p^0	8		

il y 2 changement de signe (les coefficients de la 1ère colonne ne sont pas tous du même signe) donc le système est instable.

Exercice N° 5

même question si l'équation caractéristique est :

$$p^4+p^3+5p^2+4p+4=0$$

Solution

p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	0
p^1	0	0	$\cancel{0} \rightarrow p^2+4 \Rightarrow 2p$
p^1	2	0	
p^0	4	0	

$p = \pm j2$

en dérivant

système à la limite de la stabilité car il possède 1 zéro à la 1ère colonne.

Exercice N°= 6

Pour chacun des polynômes caractéristiques, déterminer si le système qu'il représente est stable ou non

1) $2p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 10p + 20$
2) $p^3 + 7p^2 + 7p + 46$
3) $p^5 + 6p^4 + 10p^2 + 5p + 24$
4) $p^3 - 2p^2 + 4p + 6$
5) $p^4 + 8p^3 + 24p^2 + 32p + 16$
6) $p^6 + 4p^4 + 8p^2 + 16$

Exercice N°= 7

Pour quelles valeurs de K le système, dont l'équation caractéristique de sa fonction de transfert est $p^3 + (4+K)p^2 + 6p + 12$ est stable

Réponse à l'exercice n°= 6

2 et 5 représentent des systèmes stables.

1, 3, 4, ~~5~~, 6

Réponse à l'exercice N°= 7

$K > -2$