CHAPITRE 1 : Concepts d'équilibre élastique stable et instable

OBJECTIF

Introduire les principaux concepts et définitions nécessaires à la compréhension de l'équilibre élastique stable et instable dans les structures.

RESUME

Ce cours débute par la définition des états d'équilibre stable et instable d'un système mécanique. On y introduit la loi du minimum de l'énergie potentielle et sa relation avec la stabilité d'une structure au moyen de considérations non-mathématiques. On y présente les concepts du flambement par bifurcation, pour les systèmes parfaits et du flambement par divergence, pour les systèmes non-parfaits. On évoque aussi rapidement le comportement post-critique d'un système et la réduction de la stabilité lorsqu'il y a coïncidence de plusieurs modes d'instabilité.

1. INTRODUCTION

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élancement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques. Normalement, on considère des systèmes avec un paramètre variable N qui représente classiquement la charge extérieure, mais qui peut aussi être la température (flambement thermique) ou d'autres phénomènes. Pour chaque valeur de N, il n'existe qu'une configuration hors flambement.

Dans les problèmes classiques de flambement, le système est stable si N est assez petit et devient instable quand N est grand. La valeur de N pour laquelle le système cesse d'être stable est appelée : valeur critique *Ncr*. Plus généralement, il faut déterminer :

- les configurations d'équilibre de la structure sous les chargements imposés,
- celles parmi ces configurations qui sont stables,
- la valeur critique des chargements et les conséquences sur le comportement qu'ont ces niveaux de charge.

2. ETATS D'EQUILIBRE STABLE ET INSTABLE

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement.

Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet[1] :

« *L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles* ».

Cette définition montre clairement que la stabilité détermine une qualité d'une solution (une solution d'équilibre) d'un système et que le problème de s'assurer de la stabilité d'une solution concerne le « voisinage » de cette solution particulière.

[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) : Mathématicien Allemand

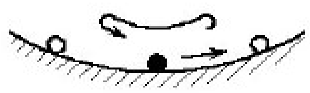
Si on considère un système élastique conservatif, initialement en état d'équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, le système s'écartera de cet état d'équilibre seulement s'il subit une force perturbatrice temporaire.

Si l'énergie fournie au système par cette force perturbatrice est W, on a alors :

$$W = T + V = constante \tag{1}$$

à cause du principe de conservation de l'énergie. Dans cette relation (eq. 1), T représente l'énergie cinétique du système et V l'énergie potentielle. Une faible augmentation de T s'accompagne d'une diminution faible identique de V et vice versa. Si le système est initialement en configuration d'équilibre d'énergie potentielle minimale, alors l'énergie cinétique T du déplacement libre correspondant décroît dans la mesure où V doit croître. Par conséquent, le déplacement depuis l'état initial restera faible et l'état d'équilibre est stable.

Pour des corps rigides, la stabilité peut être illustrée par l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe (Fig. 1). Si la bille repose sur une surface concave (Fig. 1a), l'équilibre est stable ; si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre. D'un autre côté, si le système n'est pas dans une configuration de V minimum (énergie potentielle), alors le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements et vitesses et on dit que le système est instable. C'est le cas lorsque la bille repose au sommet d'une surface convexe (Fig. 1b) ou au point d'inflexion horizontal d'une surface (Fig. 1c). Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit « neutre » (Fig. 1d).



a) Stable

b, c) Instable

d) Neutre

Figure 1. Les Trois états d'équilibre

3. ENERGIE POTENTIELLE MINIMALE

L'exemple intuitif de la bille conduit à la loi de l'énergie potentielle minimale pour un système:

« *Un système élastique conservatif est en état d'équilibre stable si et seulement si, la valeur de l'énergie potentielle correspond à un minimum relatif* ».

On utilise le terme de « minimum relatif » parce qu'il peut y avoir tout près d'autres minima correspondant à des valeurs plus faibles de l'énergie potentielle, séparés par de petites « buttes », mais qui nécessitent de fortes perturbations pour passer de l'un à l'autre (Fig. 2). L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle, en configuration d'équilibre, est, d'un point de vue strict, une condition seulement suffisante de stabilité. En pratique, cependant, ce principe est généralement accepté comme une condition à la fois nécessaire et suffisante de stabilité.

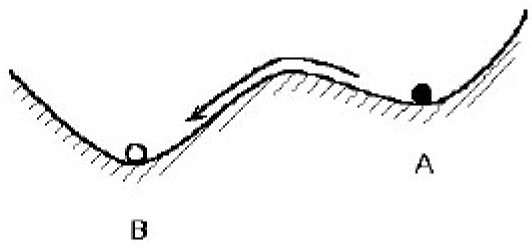


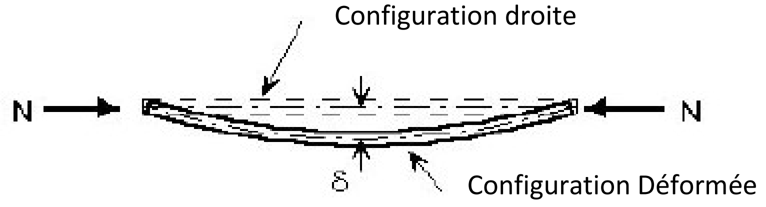
Figure 2. Caractère Relatif de l'équilibre

4. FLAMBEMENT PAR BIFURCATION

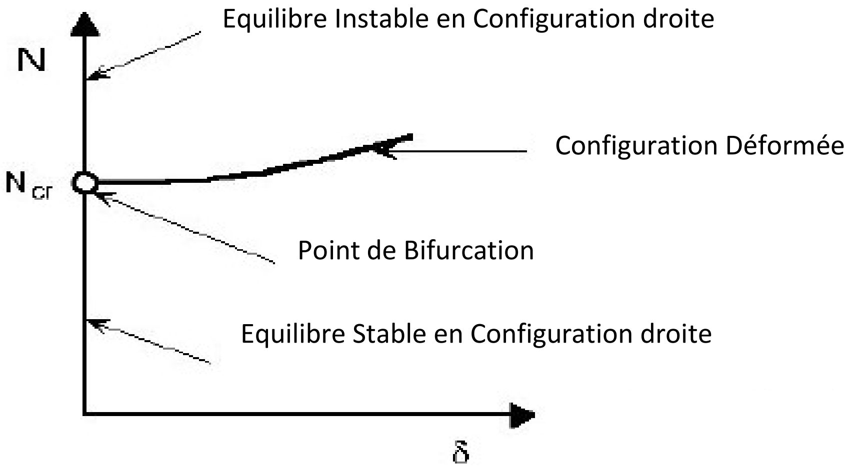
On a vu que le concept de stabilité est en relation avec l'énergie potentielle d'un système. Cependant, la stabilité d'un système élastique statique ou d'une structure, peut aussi s'expliquer par des considérations de rigidité. Si l'on se réfère à la figure 1a, on peut voir que la dérivée de l'énergie potentielle par rapport au déplacement donne la rigidité (sur la figure : la pente de la surface) du système.

De ce fait, une rigidité positive implique un état stable, tandis que, à la limite de la stabilité, la rigidité disparaît. Pour une structure, la rigidité est fournie sous forme matricielle qui, si elle est à la fois définie et positive, garantit à la structure un état stable. Le point auquel l'état d'un système change, pour passer d'un état d'équilibre stable à un état d'équilibre neutre est appelé « limite de stabilité ».

Le système de la bille sur un support courbe (dans ce cas la stabilité ne dépend que de la forme de la surface) peut être comparé à une structure telle qu'un poteau en compression. Dans ce cas, le poteau peut être stable ou instable, selon la valeur de la charge axiale, paramètre de contrôle du système (Fig. 3a).



a) Poteau à appuis simple



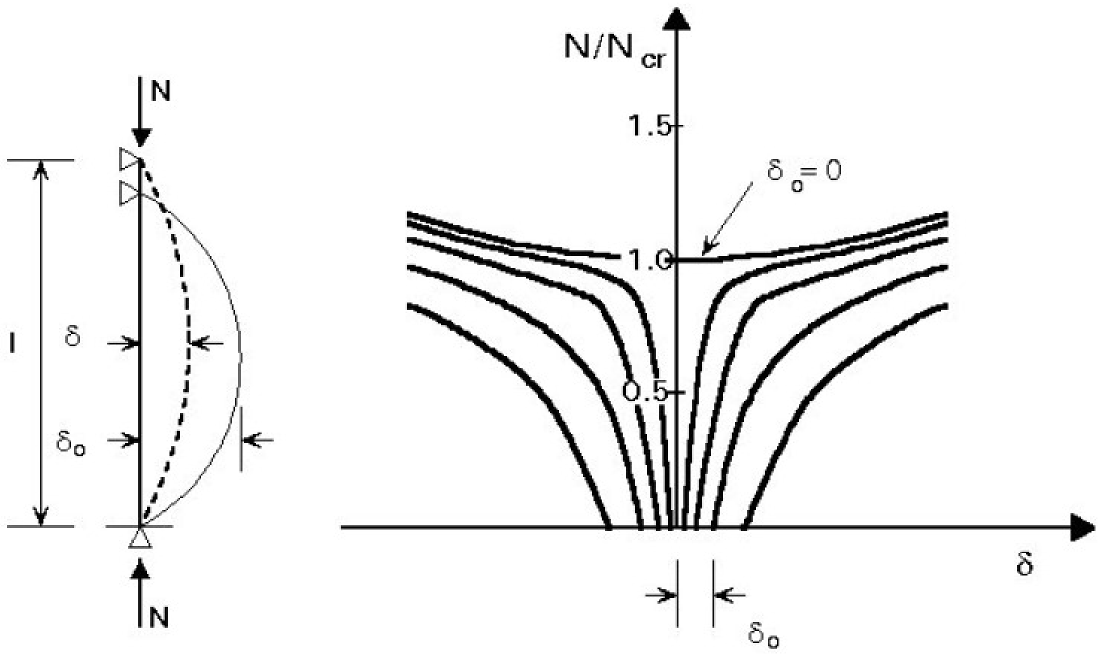
b) Relation (Force axiale-Déformation)

Figure 3. Stabilité d'un Poteau sous Compression

Comme l'élément est initialement rectiligne et la charge axiale, la structure sera en équilibre stable pour des valeurs de N faibles ; s'il y a des déflexions (flèches) dues à des forces perturbatrices, le poteau reviendra à sa position rectiligne. Lorsque la charge atteint un certain niveau, appelé « charge critique », l'équilibre stable atteint une limite. Pour cette valeur *Ncr* de la charge, il existe une autre position d'équilibre, correspondant à une configuration légèrement déformée du poteau ; si pour cette valeur, l'élément est déformé par une perturbation quelconque faible, il ne reviendra pas à sa configuration rectiligne.

Si la charge dépasse la valeur critique, la position rectiligne est instable et une perturbation légère conduit à de grands déplacements pour l'élément, puis, enfin, à l'effondrement du poteau par flambement. Le point critique, au-delà duquel les déplacements de l'élément deviennent très grands, est appelé « *point de bifurcation* » du système (Fig. 3b).

Si le poteau n'est pas initialement parfaitement rectiligne, la déflexion commence dès le début du chargement, il n'y a pas flambement soudain par bifurcation, mais augmentation continue des déplacements (Fig. 4). Ce phénomène est appelé « divergence d'équilibre » et il n'y a pas de limite de stabilité stricte. Si le matériau reste élastique, la rigidité du poteau (donnée ici par la pente de la courbe N.δ) est toujours positive, mais une petite perturbation produira de très grands déplacements.



a) Poteau imparfait (non parfait) à appuis simple b) Relation (Force axiale-Déformation)

Figure 4. Stabilité d'un Poteau imparfait sous Compression

La diminution de rigidité d'un élément de structure est, en général, due à un changement soit de la géométrie, soit des propriétés mécaniques. La diminution de rigidité due à une modification de la géométrie ne crée généralement pas de perte de stabilité, mais conduit à de grands déplacements. Par ailleurs, des diminutions importantes de rigidité proviennent de changements dans les propriétés mécaniques (élastiques ou de rupture) du matériau et, de ce fait, conduisent à l'effondrement de l'élément.