II.4 Vibrations Libres du Système Linéaire à 1 D.D.L

Les Oscillations (vibrations) libre du système Dynamique Linéaire à 1D.D.L sont la Solution (réponse) de l'éq (II-17) sans l'intervention du terme représentant la force Extérieure à savoir :

$$\boxed{\ddot{U} + 2\xi w \dot{U} + w^2 U = 0} \quad \text{--- II.21}$$

Selon la nature du terme représentant l'autre force non Conservatrice (terme d'amortissement), On peut distingé 02 Cas

$$\begin{cases} C = 0 \rightarrow \text{Système non amorti} \\ C \neq 0 \rightarrow \text{" amorti} \end{cases}$$

II.4.1 Vibrations libres non amortie (C=0)

En négligeant la Composante d'amortissement l'E.M du Système dans le Cas des vibrations libres non amortie devient :

$$\ddot{U} + w^2 U = 0 \quad \text{--- II.22}$$

La Solution d'une tel equation différentielle s'écrit sous la formes

$$\begin{cases} U(t) = A \sin(wt) + B \cos(wt) \text{ --- (a)} \\ \text{ou bien de façon equivalente} \text{ --- II.23} \\ U(t) = G \sin(wt + \varphi) \text{ --- (b)} \end{cases}$$

l'amplitude la ~~phase~~ déphasage

Les Constantes A, B dans (eq II.23.a) ou bien G, φ dans eq II.23.b sont à déterminer à partir des Conditions Initials du mouvement à l'instant $(t=0)$ en terme de déplacement (U_0) et de Vitesse $(\dot{U}_0)$:

Par Exemple Pour : (eq II.23.b)

En notant $\dot{U}_0 = \dot{U}(0)$; $U_0 = U(0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_0 = G \sin\varphi \\ \dot{U}_0 = G w \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} U_0 = G \sin\varphi \\ \dfrac{\dot{U}_0}{w} = G \cos\varphi \end{cases}} \quad \text{— II.24}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_0^2 = G^2 \sin^2\varphi \\ \left(\dfrac{\dot{U}_0}{w}\right)^2 = G^2 \cos^2\varphi \end{cases} \Rightarrow U_0^2 + \left(\frac{\dot{U}_0}{w}\right)^2 = G^2$$

$$\Rightarrow G = \sqrt{U_0^2 + \left(\frac{\dot{U}_0}{w}\right)^2} \quad \text{— II.25}$$

de (eq II.24) $\dfrac{U_0}{\dot{U}_0} = \dfrac{\sin\varphi}{w \cos\varphi}$

$$\Rightarrow Tg\,\varphi = \frac{w U_0}{\dot{U}_0} \Rightarrow \boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{w U_0}{\dot{U}_0}\right)}$$

Devoir : Montrer que $\begin{cases} G = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \varphi = f(A, B) \end{cases}$? II.26

déterminer $f, \varphi \Rightarrow U(t) = f\cos(wt - \varphi)$

10

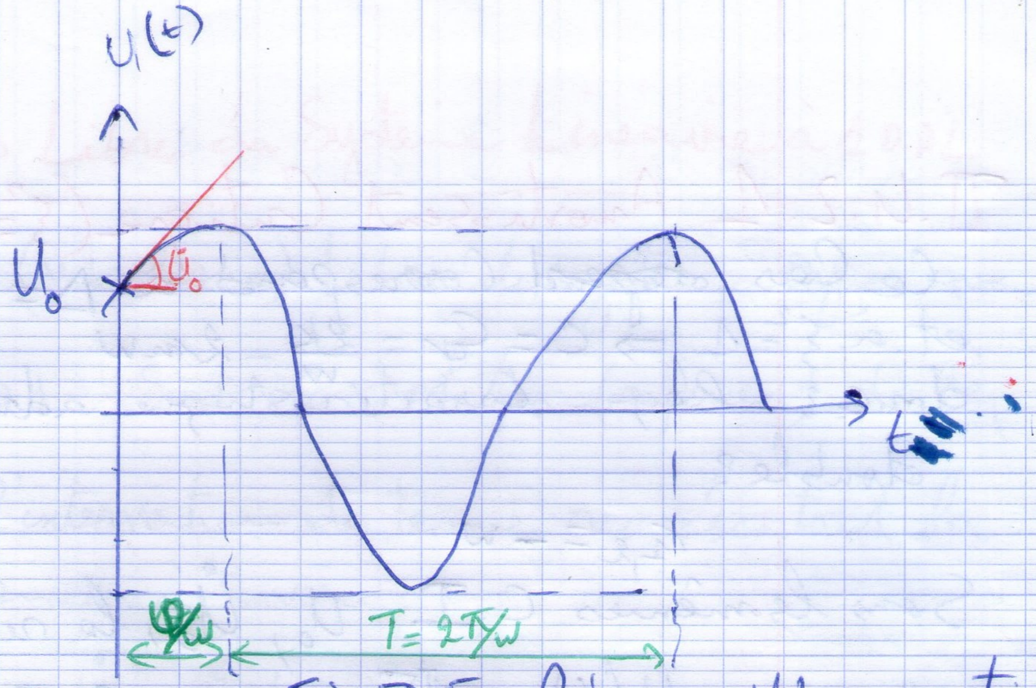

Fig II.5 Réponse en V.L non amortie

II.4.2 V.L ~~non~~ amortie $(C \neq 0)$

Dans le Cas des Vibrations libres non amortie

On l'E.M est ~~l'~~équ (II.21).

Vue qu'on se positionne dans le Cas Libre sans second membre, de la force Exté— donc la Solution est uniquement la Solution Hom de l'équation Caractéristique:

$$\boxed{r^2 + 2\xi w r + w^2 = 0 \quad \text{——} \quad (II.27)}$$

dont On peut clairement constater que la Solution dépend du Signe du déterminant :

$$\Delta = w^2(\xi^2 - 1) \quad \text{———} \quad II.28$$

qui lui-même dépend de la Valeur du Taux d'amortis. Critique (ξ) :

$$\begin{cases} \xi^2 = 1 \rightarrow \text{amortissement Critique} \\ \xi^2 > 1 \rightarrow \quad \sim \quad \text{Sur Critique} \\ \xi^2 < 1 \rightarrow \quad \sim \quad \text{sous Critique} \end{cases}$$