

Les forces de la figure (II.4) sont :

- * La force Extérieure $P(t)$
- * La force de rappel élastique donnée par l'éq (II.1) $f_s = K \cdot U$
- * ~ ~ ~ d'amortissement visqueux donnée par (II.3) $f_d = C \cdot \dot{U}$
- * Les forces d'inertie f_i dues au mouvement de la masse (M) qui égales au produit de celle-ci (M) par l'accélération ($\ddot{U}$)
($f_i = m \ddot{U}$)

donc En formulant directement l'équation de mouvement

$$\boxed{f_s + f_d = P(t) - f_i} \quad \text{--- (II.5)}$$

donc :

$$\boxed{M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = P(t)} \quad \text{--- (II.6)}$$

II.3.2 Formulation par le Théorème de la Puissance :

« La dérivée de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces non Conservatives »

$$\frac{d E_m}{dt} = P_{n.c} \quad \text{--- (II.7)}$$

E_m : Energie mécanique du Système composée de l'énergie Cinétique $T = \frac{1}{2} m \dot{U}^2$; et l'énergie potentielle $V = \frac{1}{2} K U^2$

$P_{n.c}$: la puissance des Forces non Conservatives ^{c.à.d} i.e les forces qui apportent ou retirent de l'énergie au Système.

donc :

$$\frac{d E_m}{dt} = m \dot{U} \ddot{U} + K U \dot{U} \quad \text{--- (II.8)}$$

Les Forces non Conservatives du Système sont la charge Extérieure $P(t)$ et la force d'amortissement qui dissipe de l'énergie donc (en puissance qui égale à la Force multipliée par la vitesse)

$$P_{m.c} = P(t) \cdot \dot{U} + c \dot{U}^2 \quad \text{--- (II.9)}$$

En remplaçant (II.8) et (II.9) dans (II.7) :

$$m \ddot{U} + k U \dot{U} = P(t) \dot{U} - c \dot{U}^2 \quad \text{--- (II.10)}$$

En simplifiant par $\dot{U}$ On Obtient l'E.M (II.6) :

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = P(t) \quad \text{--- (II.11)}$$

II.3.3 Méthode Énergétique (formalisme de Lagrange) :

Dans le Cas d'un Système soumis à des Forces non Conservatives l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial T}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial U} = F_{m.c} \quad \text{--- (II.12)}$$

$$\begin{cases} F_{m.c} = P(t) - c \dot{U} \\ T = \frac{1}{2} m \dot{U}^2 \\ V = \frac{1}{2} k U^2 \end{cases} \quad \text{--- (II.13)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{U}} = m \dot{U} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}} \right) = m \ddot{U} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial U} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial U} = k U \Rightarrow \text{m.e.M. : } \boxed{M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = P(t)} \quad \text{--- II.14}$$

On peut réarranger l'É.M (II.14) en faisant intervenir les 2 grandeurs fondamentales suivantes caractérisant l'Oscillateur :

→ Pulsation Propre : $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ — (II.15)

ou fréquence propre $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$ — (II.16)b

ou période propre $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$ — (II.16.a)

→ Pourcentage (taux) d'amortissement Critique.

(II.16.1) $\xi = \frac{C}{2M\omega} = \frac{C}{2\sqrt{KM}} = \frac{C}{C_r}$ (C_r : amortissement Critique)
 $C_r = \frac{2K}{\omega}$

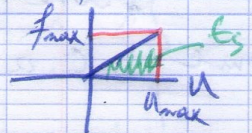
donc l'équation de mouvement (II.14) peut prendre la forme réduite suivante : (en divisant sur M)

$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{P(t)}{m}$ — (II.17)

Pour un système linéaire dont la courbe est celle de la figure (II.1)

La rigidité (Raideur) K peut être exprimée en fonction de l'énergie élastique emmagasinée (E_s) qui égale à l'aire sous la courbe de la loi de comportement

$E_s = \frac{f_{\max} \cdot u_{\max}}{2}$ / $K = \frac{f_{\max}}{u_{\max}}$



→ $E_s = \frac{K u_{\max} \cdot u_{\max}}{2} = \frac{K u_{\max}^2}{2} \Rightarrow K = \frac{2 E_s}{u_{\max}^2}$ — (II.18)

(7)

Si On se place à résonance ($\bar{\omega} = \omega$), Le Pourcentage d'amortissement critique peut finalement s'écrire indépendamment de la pulsation ($\bar{\omega}$) de la charge extérieure en utilisant (II.16.1)(II.4) (II.15), (II.18) :

$$\xi = \frac{C}{2M\omega} \quad \text{avec} \quad C = \frac{Ed}{\pi \bar{\omega} U_{\max}^2}$$

$$\xi = \frac{Ed}{2M\omega \cdot \cancel{\pi \bar{\omega}} U_{\max}^2} \times \frac{\cancel{\bar{\omega}}}{\omega} \quad / \text{à résonance } \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1$$

$$\xi = \frac{Ed}{2 \underbrace{M\omega^2}_K \pi U_{\max}^2} = \frac{Ed}{2K\pi U_{\max}^2} \quad \text{avec } K = M\omega^2$$

$\hookrightarrow K = \frac{2ES}{U_{\max}^2}$

$$\Rightarrow \xi = \frac{Ed}{2 \left(\frac{2ES}{U_{\max}^2} \right) \pi \cancel{U_{\max}^2}} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{Ed}{4\pi ES}} \quad \text{--- (II.19)}$$

La Solution de l'E.M dans sa forme réduite (II.17) qui donne la réponse du Système simple linéaire à 1. DDL est obtenue classiquement en cherchant :

Somme { * Une Solution de l'équation homogène (non forcée) c.à.d sans la force $P(t)$

{ * Une Solution particulière (système forcé) en se basant sur les C.I. de déplacement et vitesse

$$U(t) = U_H(t) + U_P(t)$$