

Chapitre 4. Plasticité et viscoplasticité

I. PLASTICITÉ

1. Définition

Le comportement plastique est celui d'un corps solide qui prend des déformations permanentes sans se fissurer. On admet généralement que ces déformations permanentes se produisent au-delà d'un seuil de contrainte appelé seuil de plasticité ou limite d'élasticité la déformation totale ϵ peut être décomposée en une partie élastique ϵ_{el} , directement proportionnelle aux contraintes et donc récupérable par décharge (car nulle lorsque les contraintes sont nulles) et une partie plastique ϵ_P , qui subsiste après décharge : $\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_P$

2. Mise en évidence expérimentale du comportement élastoplastique : L'expérience de charge-décharge

La figure 1 représente la courbe-type d'un essai de traction simple d'une éprouvette d'acier, donnant l'évolution de l'effort de traction F (rapporté à la section initiale de l'éprouvette S_0) en fonction de l'allongement relatif $\Delta l / l_0$, mesuré dans la partie centrale de l'éprouvette.

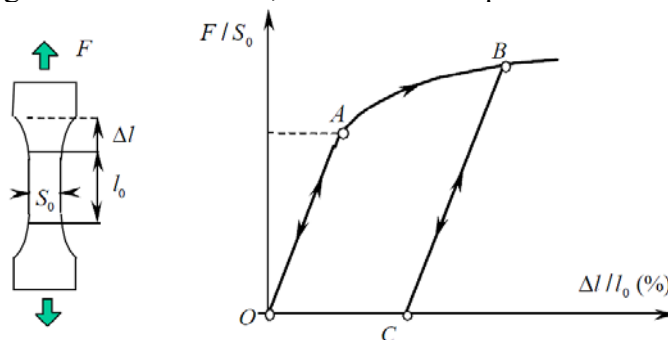


Figure 1- Courbe expérimentale de traction d'une éprouvette d'acier.

L'analyse d'une telle expérience fait apparaître les caractéristiques suivantes :

-La **réversibilité** de la réponse en allongement de l'éprouvette dans la partie OA du diagramme, c'est-à-dire tant que l'effort F demeure inférieur à un seuil correspondant à l'ordonnée du point A , appelé **seuil d'élasticité initial**. Cette réversibilité se traduit par une relation de proportionnalité entre l'effort et l'allongement, caractéristique du comportement **élastique** (linéaire) du matériau constitutif.

_ L'**irréversibilité** de la réponse de l'éprouvette apparaît dès lors que l'on poursuit le chargement au-delà du seuil d'élasticité initial jusqu'à un point B , puis que l'on effectue une décharge complète ($F=0$) jusqu'au point C . La courbe BC de décharge est différente de la courbe OAB de première charge, de sorte qu'au point C subsiste un allongement **rémanent**.

C'est la manifestation du **comportement plastique** du matériau constitutif.

_ Rechargeant l'éprouvette à partir de ce nouvel état déchargé, on constate que le point représentatif dans le diagramme parcourt en sens inverse le segment BC de décharge.

L'ordonnée du point B représente le nouveau seuil d'élasticité, appelé **seuil d'élasticité actuel**, au-delà duquel apparaît de nouveau la plasticité. L'augmentation du seuil d'élasticité constitue le phénomène **d'écrouissage**.

✓ 2.1 Observations

a) Les champs de contrainte et de déformation dans la partie médiane de l'éprouvette étant

homogènes (ce qui suppose notamment l'homogénéité du matériau constitutif à l'échelle de l'éprouvette), F / S_0 et $\Delta l_0 / l_0$ peuvent s'interpréter respectivement comme la *contrainte uniaxiale* de traction σ subie *localement* par le matériau, et la *déformation linéarisée* correspondante ε selon l'axe de l'éprouvette, supposée en transformation infinitésimale ($\Delta l_0 / l_0 \ll 1$). On obtient ainsi le diagramme «contrainte-déformation» de la figure 2, homologue de celui de la figure 1, mais caractérisant cette fois-ci le comportement *local* du matériau sous sollicitation *uniaxiale* de traction. La valeur de la déformation correspondant à l'allongement résiduel consécutif au cycle charge-décharge, s'appelle la *déformation plastique*, notée ε^P .

$$\begin{array}{ll} \text{Elasticité} & \varepsilon = \varepsilon^E \quad \text{si } \sigma \leq \sigma_e \\ \text{Plasticité} & \varepsilon = \varepsilon^E + \varepsilon^P \quad \text{si } \sigma > \sigma_e \end{array}$$

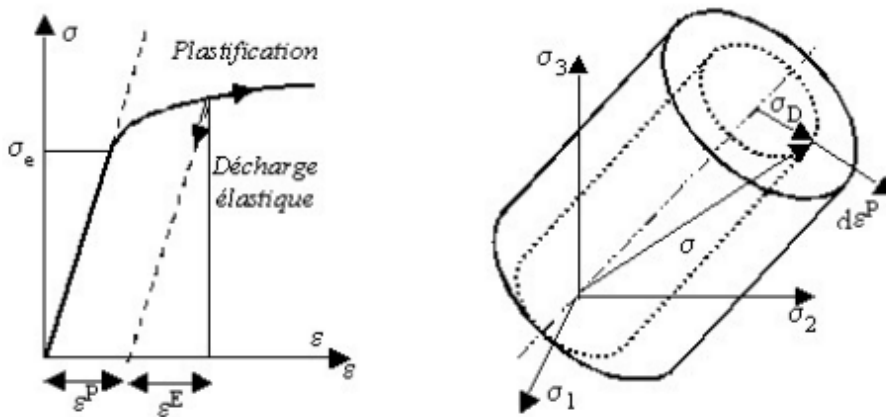


Figure 2-Diagramme $\sigma - \varepsilon$ pour un matériau élasto-plastique avec écrouissage.

b) Un cas particulier important de comportement élastoplastique est celui du matériau *élastique parfaitement plastique* pour lequel la courbe contrainte-déformation comporte un palier horizontal. La figure 3 donne une représentation schématique d'un tel comportement pour lequel le seuil d'élasticité σ_0 demeure constant, c'est-à-dire que l'écrouissage du matériau disparaît. Ce modèle idéal du matériau élastoplastique parfait est souvent associé à la notion de *ductilité*, par opposition à celle de *fragilité* qui évoque l'idée de rupture brutale de l'élément de matière lorsque le seuil d'élasticité est atteint.

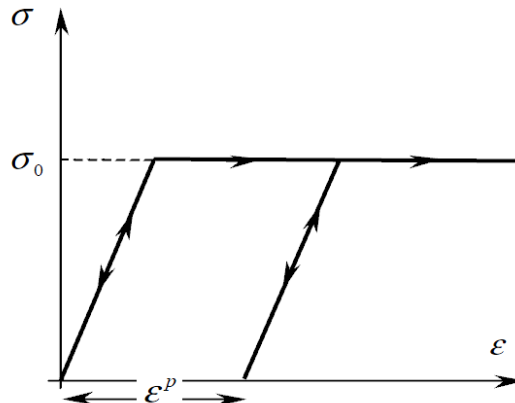


Figure 3 - Schéma de comportement élastoplastique parfait.

2.2 Essais "multiaxiaux".

Il existe de multiples procédés expérimentaux qui permettent d'accéder au comportement des matériaux soumis à des sollicitations plus complexes que la simple traction-compression uniaxiale précédemment examinée. Citons par exemple l'essai "*triaxial de révolution*" utilisé couramment pour les sols, roches ou bétons, schématisé sur la figure 4,

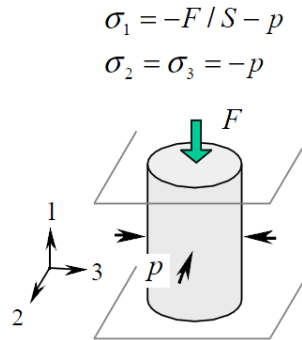


Figure 4 - Exemples d'essais "multiaxiaux".

3. Critères de limite élastique

Soient σ_1 , σ_2 et σ_3 les trois contraintes principales en un point M d'un solide. Nous supposons que la limite élastique en traction simple est égale à la limite élastique en compression simple. Soit σ_E cette limite élastique.

Comment vérifier, dans un état de contrainte complexe, que la limite élastique n'est pas dépassée ?

On admet que la limite élastique est atteinte lorsqu'une certaine fonction f des contraintes principales est égale à la limite élastique du matériau en traction simple :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_E$$

Le domaine élastique en un point du solide est donc défini par la relation :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E$$

– état de traction simple: $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

– état de cisaillement pur: $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$, $\sigma_3 = 0$.

3.1 Critère de Rankine ou de la contrainte normale maximale

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_R = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_E$$

La quantité σ_R est appelée **contrainte équivalente de Rankine**

Le critère s'écrit : $|\sigma| \leq \sigma_E$

pour un état de traction simple et $|\tau| \leq \sigma_E$

pour un état de cisaillement pur, ce qui impose $\tau_E = \sigma_E$ où τ_E est la limite élastique au cisaillement pur.

Etat plan de contraintes ($\sigma_3 = 0$)

La contrainte équivalente de Rankine se réduit à : $\sigma_R = \max (|\sigma_1| , |\sigma_2|)$

Le domaine élastique est représenté sur la figure:

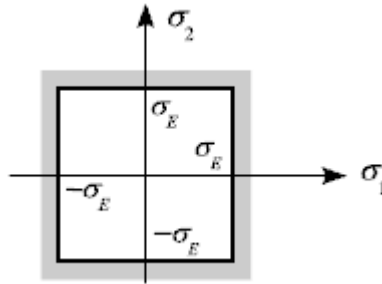


Figure 5 – Critère de Rankine : domaine élastique

3.2 Critère de Tresca ou du cisaillement maximal

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_T = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2 \tau_{\max} = \max (\sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3) - \min (\sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3) \leq \sigma_E$$

La quantité σ_T est appelée **contrainte équivalente de Tresca**

Le critère s'écrit :

$$|\sigma| \leq \sigma_E \quad \text{pour un état de traction simple et}$$

$$|2 \tau| \leq \sigma_E \quad \text{pour un état de cisaillement pur, ce qui impose } \tau_E = \sigma_E/2.$$

3.3 Etat plan de contraintes ($\sigma_3 = 0$)

La contrainte équivalente de Tresca se réduit à :

$$\sigma_T = \max (|\sigma_1 - \sigma_2| , |\sigma_1| , |\sigma_2|)$$

Le domaine élastique est représenté sur la figure:

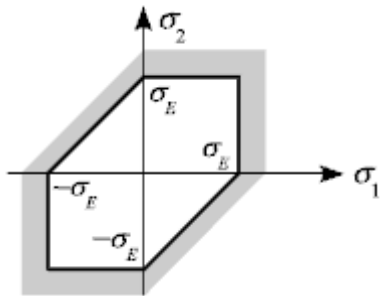


Figure 6 – Critère de Tresca : domaine élastique

3.3 Critère de Von Mises

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_{VM} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left[\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2) \right]^{1/2} \leq \sigma_E$$

La quantité σ_{VM} est appelée **contrainte équivalente de Von Mises**

Le critère s'écrit : $|\sigma| \leq \sigma_E$ Pour un état de traction simple et $\sqrt{3} |\tau| \leq \sigma_E$

Pour un état de cisaillement pur, ce qui impose $\tau_E = 1/\sqrt{3} \sigma_E = 0.58 \sigma_E$.

3.4 Etat plan de contraintes ($\sigma_3 = 0$)

La contrainte équivalente de Von Mises se réduit à $\sigma_{VM} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2}$

Le domaine élastique est représenté sur la figure

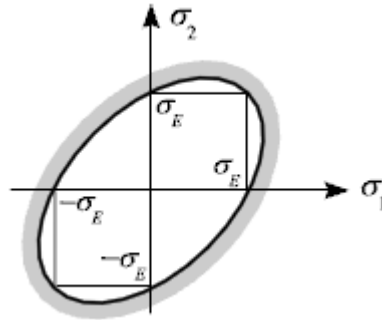


Figure 7 – Critère de Von Mises : domaine élastique

II. VISCO-PLASTICITÉ

1. Décomposition de la déformation

Le tenseur symétrique des déformations $[\varepsilon]$ est décomposé en trois parties :

- Une partie élastique $[\varepsilon_e]$ fonction de la variation du tenseur de contrainte $[\sigma]$ entre l'état actuel et l'état initial (contrainte à l'état de référence, $[\sigma_1]$; dans un grand nombre d'applications, il s'agit de l'état de contraintes nulles, mais il est par exemple toujours présent en géotechnique). En élasticité linéaire : ε^e
- Une partie de dilatation thermique ε_{th} fonction de la température actuelle T et de la température à l'état de référence T_1 . Elle s'écrit à l'aide d'un tenseur $[\alpha]$, qui dépend éventuellement de la température, et qui est sphérique dans le cas des matériaux isotropes: ε^{th} .
- Une partie non élastique ε^{ne} , elle-même décomposée en une partie plastique ε^p et une partie viscoplastique ε^{vp} , (régies par des lois d'écoulement en élastoplasticité et en élastoviscoplasticité). D'où :

$$\varepsilon^e = \varepsilon^e + \varepsilon^{th} + \varepsilon^{ne} = \varepsilon^e + \varepsilon^{th} + \varepsilon^p + \varepsilon^{vp}$$

Cette dernière décomposition de la partie non élastique des déformations exprime le fait que, durant une transformation du matériau, divers mécanismes peuvent rentrer en jeu conduisant à une dissipation de l'énergie (irréversibilité) et que, dans l'échelle des temps considérée, la viscosité de certains mécanismes peut être négligée (plasticité instantanée ε_p) alors que pour les autres, le temps réel doit intervenir dans les vitesses (déformations viscoplastiques ε_{vp}).

2. Mécanismes- EXEMPLES

○ Champs de contrainte et de déformation d'une dislocation

Dislocation vis Par invariance par translation et par raison de symétrie le champ de déplacement n'admet qu'une composante u_z fonction de r et ϕ mais indépendante de z . En dépliant le cylindre macroscopique de hauteur unité décrivant la dislocation.

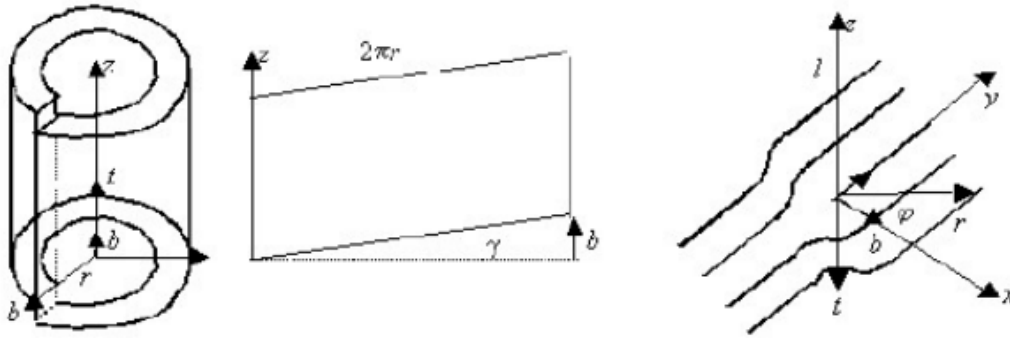


Figure 8 – Dislocation qui correspond à un glissement simple

La déformation (dislocation) correspond à un glissement simple, sans variation de volume, d'amplitude:

$$\gamma = 2\varepsilon_{z\varphi} = b/2\pi r$$

Les faibles valeurs des résistances observées dans les matériaux courants comparativement à ces valeurs théoriques s'expliquent par la présence de défauts. Dans les matériaux fragiles, ces défauts sont des microfissures. Dans les matériaux ductiles, ce sont des dislocations, c'est à dire des lacunes du réseau atomique de base (figure 9). Pour en revenir à l'exemple du glissement plastique sous cisaillement, le défaut (la dislocation) se propage de proche en proche jusqu'à déboucher, provoquant ainsi une « marche » analogue à celle que provoquerait un glissement en bloc.

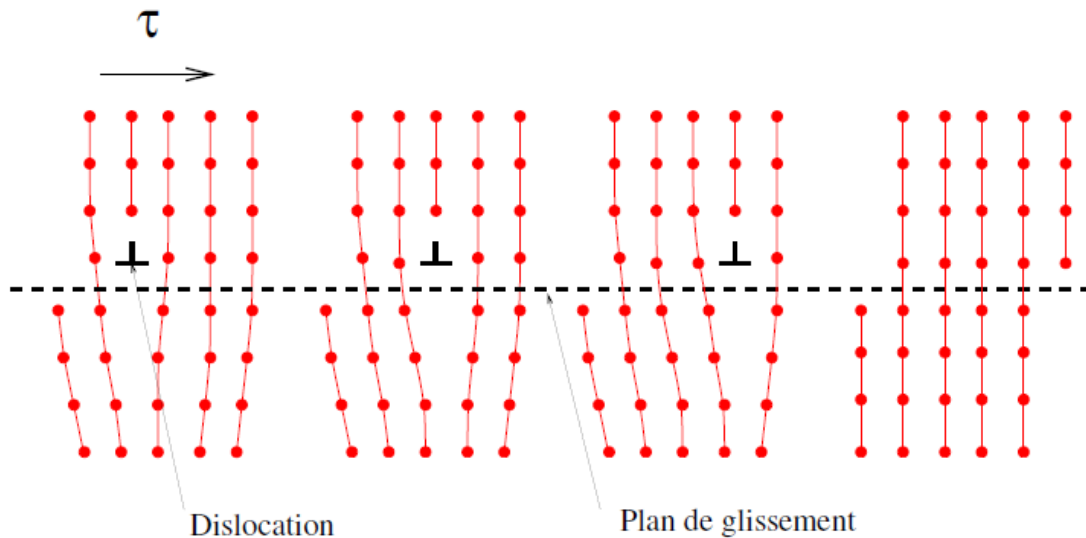
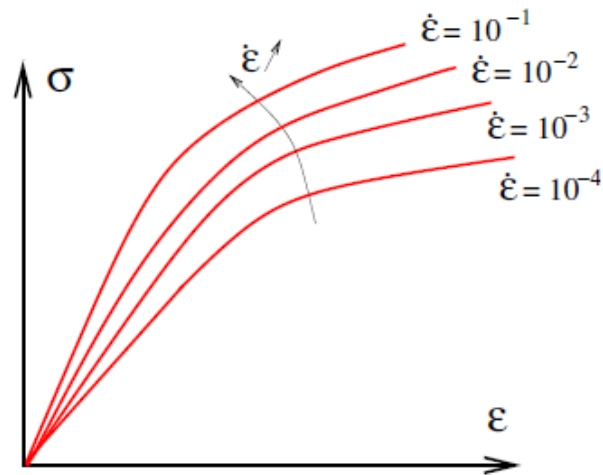


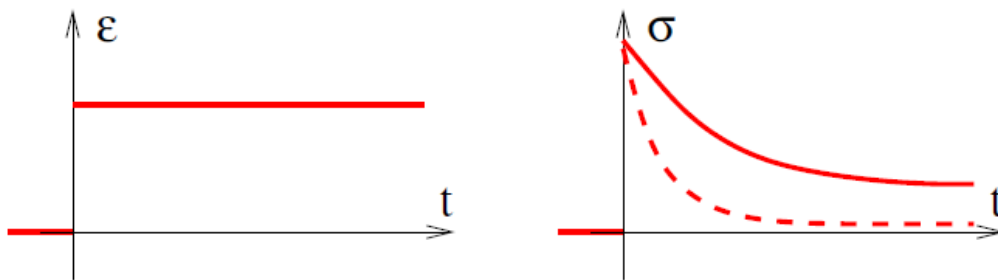
Figure 9- Mouvement d'une dislocation le long d'un plan de glissement.

(a) Relaxation des contraintes. La relaxation des contraintes est mise en évidence par le test suivant : on impose en $t = 0$ une déformation « ε » que l'on maintient constante dans le temps. La contrainte prend tout d'abord une valeur donnée par l'élasticité du matériau « $\sigma = \varepsilon E$ », puis on constate généralement qu'elle se relâche au cours du temps : c'est la relaxation. Si la relaxation est totale, on a coutume de dire que le matériau étudié a un comportement de type fluide : au bout d'un temps (qui peut être long), le matériau « oublie » la déformation qui lui a été imposée en effaçant toutes les contraintes créées. La relaxation des contraintes pose des problèmes sérieux dans le béton précontraint dont le

principe est le suivant. Le béton a une bonne tenue en compression mais se comporte comme un matériau fragile en traction. Pour le faire travailler en compression on applique une précontrainte de compression par l'intermédiaire de câbles (dits de précontrainte). Si la précontrainte se relaxe au cours du temps, certaines zones de l'ouvrage peuvent se trouver en traction ce qui les met en danger de fissuration.



(a)



(b)

Figure10-

(b) Fluage. On impose brusquement une contrainte σ qu'on maintient constante au cours du temps. Il en résulte une déformation initiale élastique ϵ , puis généralement la déformation augmente avec le temps : c'est le fluage.