Univ-Badji Mokhtar-Annaba
Master1 Géotechnique
Dpt Génie civil
Module : MSDEF

Année 2019/2020
Dr OTMANI Nadia

TD N°1 : Elasticité – Etats de contraintes

Exercice n°1

On considère un petit cube de centre x, dans un milieu continu soumis à des contraintes. On effectue trois expériences de chargement (a), (b), et (c), respectivement caractérisées par les vecteurs contraintes suivants (σ_o, étant une constante) :

(a). $\vec{T}(\vec{x},\vec{e_1}) = \vec{0}$; $\vec{T}(\vec{x},\vec{e_2}) = \sigma_0\vec{e_3}$; $\vec{T}(\vec{x},\vec{e_3}) = \sigma_0\vec{e_2}$

(b). $\vec{T}(\vec{x},\vec{e_1}) = \sigma_0\vec{e_3}$; $\vec{T}(\vec{x},\vec{e_2}) = \vec{0}$; $\vec{T}(\vec{x},\vec{e_3}) = \sigma_0\vec{e_1}$

(c). $\vec{T}(\vec{x},\vec{e_1}) = \sigma_0\vec{e_2}$; $\vec{T}(\vec{x},\vec{e_2}) = \sigma_0\vec{e_1}$; $\vec{T}(\vec{x},\vec{e_3}) = \vec{0}$

1. Exprimer les trois tenseurs de contraintes $\overline{\overline{\sigma_{(a)}}}$, $\overline{\overline{\sigma_{(b)}}}$, et $\overline{\overline{\sigma_{(c)}}}$ correspondant à ces trois cas de chargement.
2. On effectue les trois expériences simultanément en superposant les trois systèmes de forces. Exprimer le tenseur de contraintes correspondant à cette nouvelle expérience.

Exercice n°2

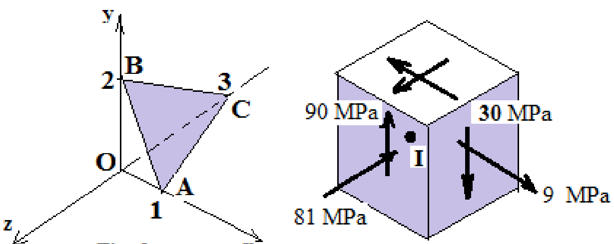

Fig. 2

La figure 2 présente un système d'axes sous lequel l'état de contrainte en un point I du matériau est donné. Un plan ABC est aussi spécifié.

1. Calculer les contraintes principales
2. Calculer la contrainte normale et la contrainte de cisaillement agissant sur le plan ABC qui a pour normale :$\{n\} = \{\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\}$

Exercice n°3

Dans la base cartésienne (x, y, z), Le tenseur des contraintes en un point M d'un solide est :

$$\overline{\sigma} = \begin{bmatrix} -10 & 00 & 00 \\ 00 & -10 & 10 \\ 00 & 10 & 30 \end{bmatrix} Mpa$$

1) Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des Contraintes.

2) Déterminez le vecteur contrainte $\overrightarrow{\Phi_1}(M, \vec{n})$, avec n colinéaire à $\vec{N}$ = (0, 1,1), que peut dire ?

SOLUTION

Exercice n°1

1. **Exprimer les trois tenseurs de contraintes $\overline{\overline{\sigma_{(a)}}}$, $\overline{\overline{\sigma_{(b)}}}$, et $\overline{\overline{\sigma_{(c)}}}$ correspondant à ces trois cas de chargement.**

(a). $\vec{T}(\vec{x},\overrightarrow{e_1}) = \vec{0}$; $\vec{T}(\vec{x},\overrightarrow{e_2}) = \sigma_0\overrightarrow{e_3}$; $\vec{T}(\vec{x},\overrightarrow{e_3}) = \sigma_0\overrightarrow{e_2}$

$\vec{T}(x,(e\_1\ )^{\rightharpoonup}) = 0\overrightarrow{e1} + 0\overrightarrow{e2} + 0\overrightarrow{e3}$ ou $\{T(x,\overrightarrow{e_1})\} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$ de même pour les autre vecteurs

$$\vec{T}(x,\overrightarrow{e_2}) = 0\overrightarrow{e1} + 0\overrightarrow{e2} + \sigma_0\overrightarrow{e3}$$

$$\vec{T}(x,\overrightarrow{e_3}) = 0\overrightarrow{e1} + \sigma_0\overrightarrow{e2} + 0\overrightarrow{e3}$$

Selon le chargement (a), le tenseur des contraintes dans la base $\{x,\overrightarrow{e_1},\vec{e}_2,\overrightarrow{e_3}\}$ se compose des 3 vecteurs contraintes (a) .

$$\overline{\overline{\sigma_a}} = [\{T(x,\overrightarrow{e_1})\},\{T(x,\overrightarrow{e_2})\},\{T(x,\overrightarrow{e_3})\}]$$

$$\overline{\overline{\sigma_a}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & \sigma_0\\0 & \sigma_0 & 0\end{bmatrix}$$

Selon le chargement (b), le tenseur des contraintes dans la base $\{x,\overrightarrow{e_1},\vec{e}_2,\overrightarrow{e_3}\}$ se compose des 3 vecteurs contraintes (b).

(b). $\vec{T}(\vec{x},\overrightarrow{e_1}) = \sigma_0\overrightarrow{e_3}$; $\vec{T}(\vec{x},\overrightarrow{e_2}) = \vec{0}$; $\vec{T}(\vec{x},\overrightarrow{e_3}) = \sigma_0\overrightarrow{e_1}$

$$\overline{\overline{\sigma_b}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \sigma_0\\0 & 0 & 0\\\sigma_0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Selon le chargement (c), le tenseur des contraintes dans la base $\{x,\overrightarrow{e_1},\vec{e}_2,\overrightarrow{e_3}\}$ se compose des 3 vecteurs contraintes (c).

(c). $\vec{T}(\vec{x},\overrightarrow{e_1}) = \sigma_0\overrightarrow{e_2}$; $\vec{T}(\vec{x},\overrightarrow{e_2}) = \sigma_0\overrightarrow{e_1}$; $\vec{T}(\vec{x},\overrightarrow{e_3}) = \vec{0}$

$$\overline{\overline{\sigma_b}} = \begin{bmatrix}0 & \sigma_0 & 0\\\sigma_0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

2. **Tenseur de contraintes correspondant à la nouvelle expérience ((a), (b) et (c) en même temps = (a)+(b) + (c)**

$$\overline{\overline{\sigma_a}} + \overline{\overline{\sigma_b}} + \overline{\overline{\sigma_c}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice n°2

$$[\sigma(I)]_{X,y,z} = \begin{bmatrix} 9 & -30 & 0 \\ -30 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & -81 \end{bmatrix} Mpa \quad ;$$

Contraintes principales

$$\text{Det}\begin{bmatrix} 9-\lambda & -30 & 0 \\ -30 & 0-\lambda & 90 \\ 0 & 90 & -81-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(9-\lambda)\begin{bmatrix} -\lambda & 90 \\ 90 & -81-\lambda \end{bmatrix} - (-30)\begin{bmatrix} -30 & 90 \\ 0 & -81-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 69\ MPa\ ;\ \lambda_3 = -141\ MPa$

Contrainte normale : σ_n

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}$$

$\sigma_n = \vec{n}.[\sigma(I)].\vec{n} = \vec{n}.\vec{T}(M,\vec{n})$

$\vec{T}(M,\vec{n}) = [\sigma(I)].\vec{n}$ … Formule de Cauchy

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \vec{n}.[\sigma(I)].\{n\} = \{n\}^T.[\sigma(I)].\{n\} = \begin{Bmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -3/7 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 9 & -30 & 0 \\ -30 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & -81 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -3/7 \end{Bmatrix}$$

$$= \{6/7 \quad 3/7 \quad -3/7\} \begin{Bmatrix} -36/7 \\ -450/7 \\ 513/7 \end{Bmatrix} = \frac{6(-36)}{49} - \frac{3(450)}{49} - \frac{3(513)}{49} = -63{,}37\ \text{MPa}$$

Contrainte tangentielle :

$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n.\vec{n} + \vec{\tau}$

$\vec{\tau} = \vec{T}(M,\vec{n}) - \sigma_n.\vec{n}$

$\{\tau\} = \{T(M,\vec{n}\,)\} - \sigma_n\,.\{n\}$

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} -36/_7 \\ -450/_7 \\ 513/_7 \end{Bmatrix} - (-\,63{,}37)\begin{Bmatrix} 6/_7 \\ 3/_7 \\ -3/_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 49.17 \\ -37.12 \\ 46.17 \end{Bmatrix}$$

$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_Y^2 + \tau_Z^2}$ =76.98 MPa

Exercice n°3

1. Dans la base cartésienne (x, y, z), Le tenseur des contraintes en un point M d'un solide est :

$$\overline{\sigma} = \begin{bmatrix} -10 & 00 & 00 \\ 00 & -10 & 10 \\ 00 & 10 & 30 \end{bmatrix} Mpa$$

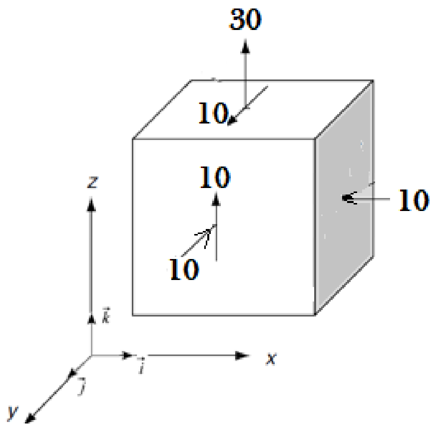

Figure1. Représentation physique des composantes du tenseur des Contraintes.

2. Le vecteur contrainte $\vec{\phi}$(M , $\vec{\mathrm{n}}$) :

$\vec{T}(M,\vec{n}\,) = [\sigma(M)].\vec{N}$ … Formule de Cauchy

$$\vec{\phi}(\mathrm{M},\vec{\mathrm{n}}) = [\sigma(M)].\vec{n} = \begin{bmatrix} -10 & 00 & 00 \\ 00 & -10 & 10 \\ 00 & 10 & 30 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{Bmatrix}$$

On peut dire que ce vecteur est parallèle à l'axe $\vec{z}$.