Université de BADJI Mokhtar ANNABA

Faculté des sciences
Department de mathématiques

Pr. GASMI SOUAD

2019/2020

BACK TO SCHOOL

AVANT DE COMMENCER

RESTEZ CHEZ VOUS. SAUVEZ DES VIES.

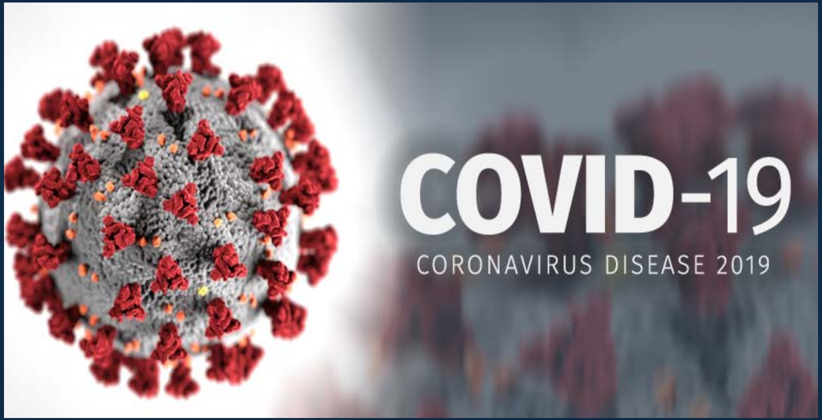
1-RESTEZ chez vous autant que possible.

2-GARDEZ une distance de sécurité.

3-LAVEZ-VOUS souvent les mains.

4-COUVREZ-VOUS la bouche quand vous toussez.

5-VOUS ÊTES MALADE ? Appelez votre médecin.



Solution de l'exercice 03

On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$e_1 = (1,0,0),$$
$$e_2 = (0,1,0),$$
$$e_3 = (0,0,1)$$

On définit l'endomorphisme (c.à.d. une application linéaire d'un espace dans lui-même) φ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{cases} \varphi\,(e_1) = -2e_1 + 2e_3 = (-2, 0,2) \\ \varphi\,(e2) = 3e_2 = (0, 3,0) \\ \varphi\,(e3) = -4e_1 + 4e_3 = (-4, 0,4) \end{cases}$$

1\ calculons $\varphi(x, y, z)$:

$$\mu = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
$$= xe_1 + ye_2 + ze_3 \text{ (car } \{e_1, e_2, e_3\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{)}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Alors } \varphi\ (\mu) &= \varphi\ (x, y, z) \\
&= \varphi\ (xe_1 + ye_2 + ze_3) \\
&= x\ \varphi(e_1) + y\ \varphi(e_2) + z\ \varphi(e_3) \qquad \text{(car } \varphi \text{ est une application linéaire)} \\
&= x(-2e_1 + 2e_3) + 3y(e_2) + z(-4e_1 + 4e_3) \\
&= (-2x - 4z)e_1 + (3y)e_2 + (2x + 4z)e_3 \\
&= (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z)
\end{aligned}
$$

2\Trouvons $ker\varphi$:

Par définition $ker\varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \varphi\ (x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$\varphi\ (x, y, z) = (0,0,0) \iff (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \\ x = -2z \end{cases}$$

Alors, $ker\varphi = \{(x, y, z)\ tq\ \ x = et\ \ y = 0\}$

$ker\varphi = \{(-2z, 0, z),\ z\epsilon\mathbb{R}\}$

($ker\varphi$ est un ensemble infini)

*/ trouvons La base de $ker\varphi$?

$$\begin{aligned} ker\varphi &= \{(-2z, 0, z), z\epsilon\mathbb{R}\} \\ &= \{z(-2,0,1), z\epsilon\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Donc , $\{(-2,0,1)\}$ est un ensemble génératrice de $ker\varphi$, et comme cet ensemble contient un seul élément on a pas besoin de vérifier l'indépendance linéaire

Alors $\{(-2,0,1)\}$ est une base $ker\varphi$

3/ Montrons si φ est injective ?

$\ker\varphi \neq \{(0,0,0)\}$ (contient d'autres éléments à part (0,0,0)), Alors φ n'est pas injective

*/ Montrons que φ est surjective

Comme $E = \mathbb{R}^3$ est de dimension fini ($dim\ \mathbb{R}^3 = 3$) et φ n'est pas injective, alors, φ n'est pas surjective.

4/ trouvons la base de $Im\varphi$

Comme$\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors, $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)\}$ est une famille generatrice de $Im\varphi$,

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = (-2,0,2) \\ \varphi(e_2) = (0,3,0) \\ \varphi(e_3) = (-4,0,4) \end{cases}$$

On remarque que $\varphi(e_3)$=2 $\varphi(e_1)$, alors on elimine $\varphi(e_3)$ et on verifie facilement que , $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2)\ \}$ est libre.
La famille $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2)\}$ est generatrice et libre, donc elle forme une base pour $Im\varphi$

*/ trouvons $rang\varphi$:
La base de $Im\varphi$ est $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2)\}$ (elle contient 2 elements), alors, $rang\varphi$.

5/ Montrons que $\mathbb{R}^3 = ker\varphi \oplus Im\varphi$:

Pour montrer ça, il suffit de montrer que la reunion des elements de la base de $ker\varphi$ et ceux de la base de $Im\varphi$ forme une base pour $\mathbb{R}^3$.

La reunion est $\mathrm{C} = \{(-2,0,2)\,,(0,3,0)\,,(-2,0,1)\}$.

C est une famille generatrice de $\mathbb{R}^3$, en effet, pour $(x, y, z)\epsilon\mathbb{R}^3$, on va chercher les scalaires $\alpha, \beta\ et\ \gamma$ tells que

$$(x, y, z) = \alpha(-2,0,2) + \beta(0,3,0) + \gamma(-2,0,1)$$

$$\begin{cases} x = -2\alpha - 2\gamma \\ y = 3\beta \\ z = 2\alpha + 2\gamma \end{cases} \quad \text{apres resoudre on trouve} \begin{cases} \alpha = \frac{x}{2} + z \\ \beta = \frac{y}{3} \\ \gamma = -x - z \end{cases}$$

Donc, C est une famille generatrice.
C est une famille libre, en effet,

$$\alpha(-2,0,2)+\beta(0,3,0)+\gamma(-2,0,1)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} -2\alpha-2\gamma=0 \\ 3\beta=0 \\ 2\alpha+2\gamma=0 \end{cases} \quad \text{apres resoudre on trouve} \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

donc, C est une famille libre.
Comme C= $\{(-2,0,2)\,,(0,3,0)\,,(-2,0,1)\}$ est une famille generatrice et libre alors, C est une base pour $\mathbb{R}^3$. C est a dire que $\mathbb{R}^3=ker\varphi\oplus Im\varphi$

Bon courage