

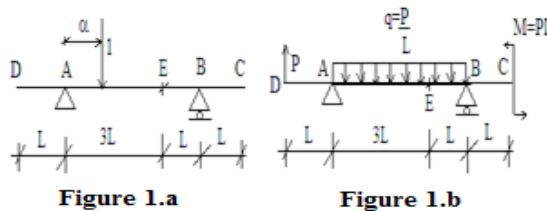
UNIVERSITE BADJI-MOKHTAR ANNABA
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE-CIVIL
3^{ème} année Licence Génie Civil

SERIE LIGNES D'INFLUENCE

EXERCICE N°1

Soit la poutre (Figure 1 a)

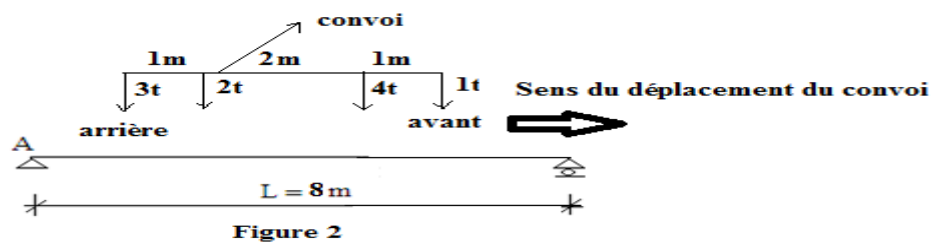
1. Tracer les lignes d'influences des réactions d'appui.
2. Tracer les lignes d'influences du moment fléchissant en E ($x=3L$)
3. Tracer les lignes d'influences de l'effort tranchant en E ($x=3L$)
4. Calculer à l'aide des lignes d'influences le moment fléchissant en E dans le cas du chargement appliqué sur la poutre ((Figure 1 b)



EXERCICE N°2

Soit la poutre de la figure 2 soumise à l'action d'un convoi ;

1. Déterminer la position la plus défavorable du convoi par rapport à la section d'appui A relativement à l'effort tranchant
2. Calculer l'effort tranchant maximum par rapport à la section d'appui A
3. En appliquant le théorème de Barré déterminer la **section critique**, la **position la plus défavorable** du convoi par rapport à cette section ainsi que le **moment fléchissant maximum**.



EXERCICE N° 3

Soit le système réticulé de la figure 3

1. Tracer les lignes d'influences des réactions d'appui.
2. Les lignes d'influences des efforts normaux dans les barres AJ et IH
3. Calculer à l'aide des lignes d'influences ces efforts normaux pour le chargement appliqué

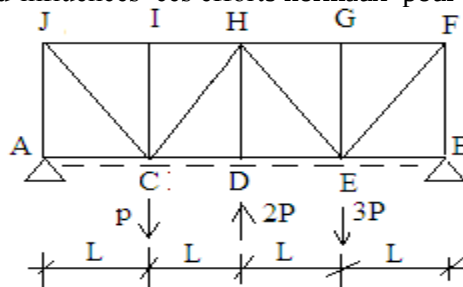


Figure 3

EXERCICE N° 1

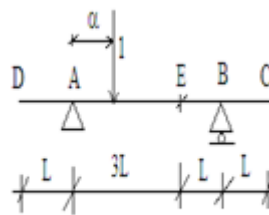


Figure 1.a

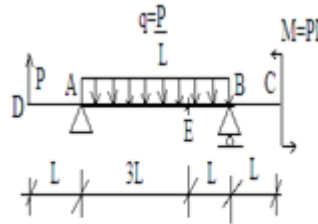


Figure 1.b

1. Tracés des lignes d'influences des réactions d'appui

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_B = R_A * 4L - 1(4L - \alpha) = 0 \Rightarrow R_A = \left(1 - \frac{\alpha}{4L}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow R_A = 1 \\ \alpha = -L \Rightarrow R_A = \frac{5}{4} \\ \alpha = 4L \Rightarrow R_A = 0 \\ \alpha = 5L \Rightarrow R_A = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$Li R_A(C = 1) = \frac{d\varepsilon(Li R_A(P=1))}{d\alpha} = -\frac{1}{4L} = cte$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 1 \Rightarrow R_B = 1 - R_A = \frac{\alpha}{4L} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow R_B = 0 \\ \alpha = -L \Rightarrow R_B = -\frac{1}{4} \\ \alpha = 4L \Rightarrow R_B = 1 \\ \alpha = 5L \Rightarrow R_B = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$Li R_B(C = 1) = \frac{d\varepsilon(Li R_B(P=1))}{d\alpha} = \frac{1}{4L} = \text{constante}$$

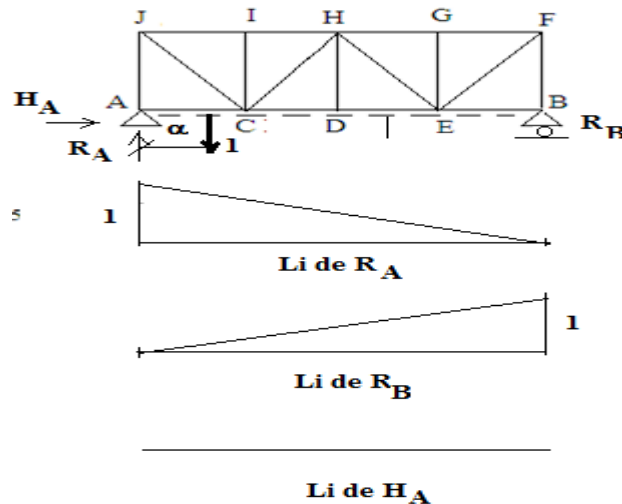
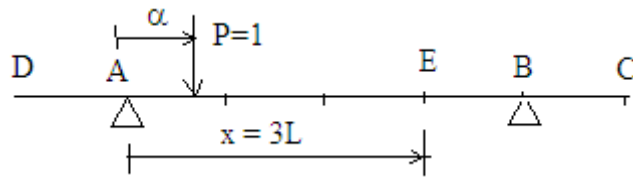


Figure 3.2: Lignes d'influence des réactions d'appui

2. Tracé des lignes d'influences du moment fléchissant en E (x=3L)

- On considère deux cas :

a) $\alpha \leq x=3L$



On établit l'équilibre à droite de la section E

$$M_E = R_B * L = \frac{\alpha}{4L} * L = \frac{\alpha}{4} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -L \Rightarrow M_E = \frac{-L}{4} \\ \alpha = 0 \Rightarrow M_E = 0 \\ \alpha = 3L \Rightarrow M_E = \frac{3L}{4} \end{cases}$$

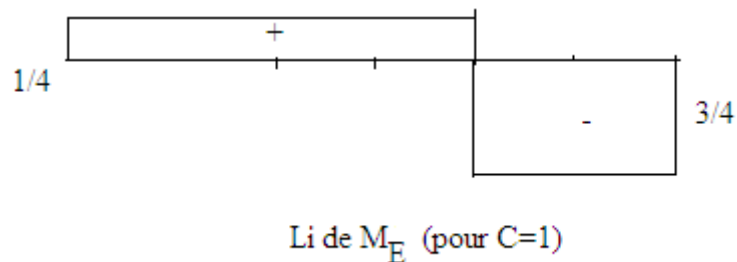
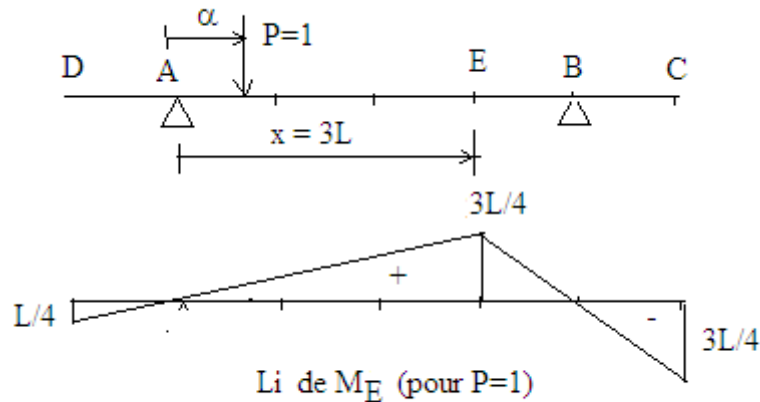
Li de M_E (pour $C = 1$) = $\frac{d}{d\alpha}$ Li de M_E (pour $P = 1$) = $\frac{1}{4}$ = constante

b) $\alpha \geq x=3L$

c) On établit l'équilibre à gauche de la section E

$$M_E = R_A * 3L = \left(1 - \frac{\alpha}{4L}\right) * 3L \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3L \Rightarrow M_E = \frac{3L}{4} \\ \alpha = 4L \Rightarrow M_E = 0 \\ \alpha = 5L \Rightarrow M_E = \frac{-3L}{4} \end{cases}$$

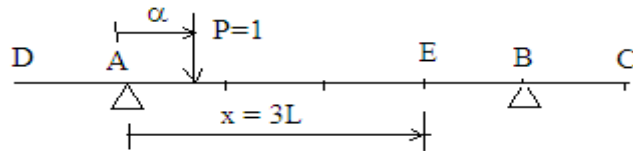
Li de M_E (pour $C = 1$) = $\frac{d}{d\alpha}$ Li de M_E (pour $P = 1$) = $-\frac{3}{4}$ = constante



3. T tracé des lignes d'influences de l'effort tranchant en E (x=3L)

On considère deux cas :

a) $\alpha \leq x=3L$



On établit l'équilibre à droite de la section E

$$T_E = -R_B = -\frac{\alpha}{4L} = -\frac{\alpha}{4L} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -L \Rightarrow M_E = \frac{1}{4} \\ \alpha = 0 \Rightarrow T_E = 0 \\ \alpha = 3L \Rightarrow T_E = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

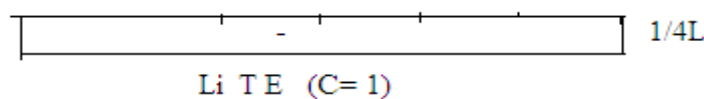
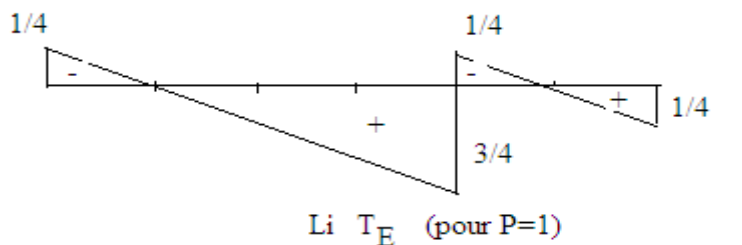
Li de T_E (pour $C = 1$) = $\frac{d}{d\alpha}$ Li de T_E (pour $P = 1$) = $-\frac{1}{4L}$ = constante

b) $\alpha \geq x=3L$

c) On établit l'équilibre à gauche de la section E

$$T_E = R_A = \left(1 - \frac{\alpha}{4L}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3L \Rightarrow M_E = \frac{1}{4} \\ \alpha = 4L \Rightarrow M_E = 0 \\ \alpha = 5L \Rightarrow M_E = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Li de M_E (pour $C = 1$) = $\frac{d}{d\alpha}$ Li de M_E (pour $P = 1$) = $-\frac{1}{4L}$ = constante



4. Calcul à l'aide des lignes d'influences du moment fléchissant en E dans le cas du chargement appliqué sur la poutre ((Figure 1.b))

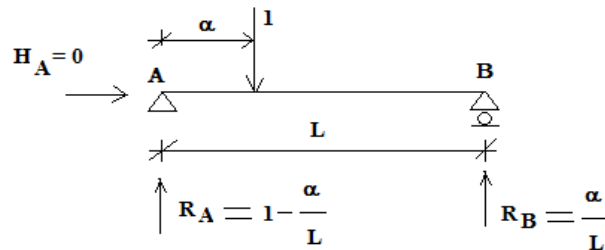
$$E = \sum_1^n P_i + \sum_1^n \int_0^{L_i} q_i(\alpha) \varepsilon_i(\alpha) d\alpha + \sum_1^n M_i + \sum_1^n \int_0^{L_i} m_i(\alpha) \varepsilon'_i(\alpha) d\alpha$$

$$E = M_E = (-P) \left(-\frac{L}{4}\right) + (-PL) \left(-\frac{3}{4}\right) + \int_0^{3L} q \left(\frac{\alpha}{4}\right) d\alpha + \int_{3L}^{4L} q \left(\left(1 - \frac{\alpha}{4L}\right) * 3L\right) d\alpha$$

$$E = M_E = \frac{5}{2} PL$$

EXERCICE N°2

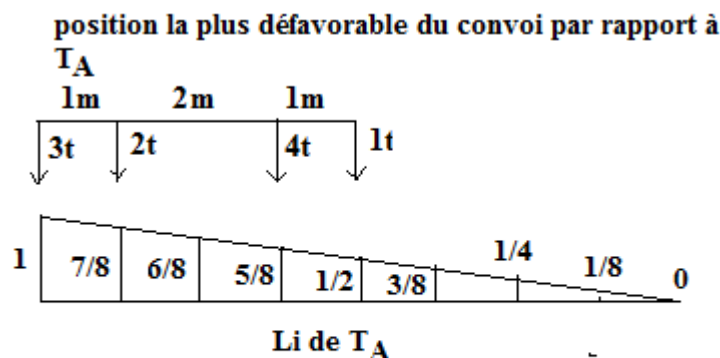
1. Détermination de la position la plus défavorable du convoi par rapport à la section d'appui A relativement à l'effort tranchant



On considère un seul cas :

a. $\alpha \geq x=0$

$$T_A = R_A = 1 - \frac{\alpha}{L} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow R_A = 1 \\ \alpha = L \Rightarrow R_A = 0 \end{cases}$$



Position la plus défavorable du convoi par rapport à T_A

2. Calcul de l'effort tranchant maximum par rapport à la section d'appui A

$$T_A = \sum_{i=1}^n P_i y_i = (3)(1) + (2)\left(\frac{7}{8}\right) + (4)\left(\frac{5}{8}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) = 7.75 \text{ t}$$

P_i : force concentrée i

y_i : ordonnée mesurée au niveau de la i ème force concentrée

Remarque:

Pour trouver la position la plus défavorable du convoi par rapport à l'effort tranchant au niveau de la section de l'appui A, on dessine à l'échelle sur un papier calque ou transparent le convoi, qu'on fait déplacer sur le tracé à l'échelle aussi de la ligne d'influence T_A . en considérant toute les positions possibles du convoi et à chaque fois on calcul T_A en appliquant la relation $T_A = \sum_{i=1}^n P_i y_i$ en fonction de la position du convoi.

3. Application du théorème de Barré pour la détermination de la section critique, la position la plus défavorable du convoi par rapport à cette section ainsi que le moment fléchissant maximum

Théorème de Barré

Enoncé du théorème : Le moment fléchissant est maximum au droit d'un essieu, lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi se trouvent dans des sections symétriques par rapport au milieu de la poutre.

- Calcul de la résultante du convoi

$$\Pi = \sum_{i=1}^n P_i = 3 + 2 + 4 + 1 = 10 \text{ t}$$

- Calcul du point d'application de la résultante du convoi

$$\sum M_{3t} = \Pi x \Rightarrow (1)(4) + (4)(3) + (2)(1) = 18 = 10x \Rightarrow x = 1.8 \text{ m}$$

- Calcul du moment maximum d'après le théorème de Barré

$$M_{imax} = \frac{\Pi L}{4} \left[1 - \frac{d_i}{l} \right]^2 - \sum_{k>i} P_k (d_k - d_i)$$

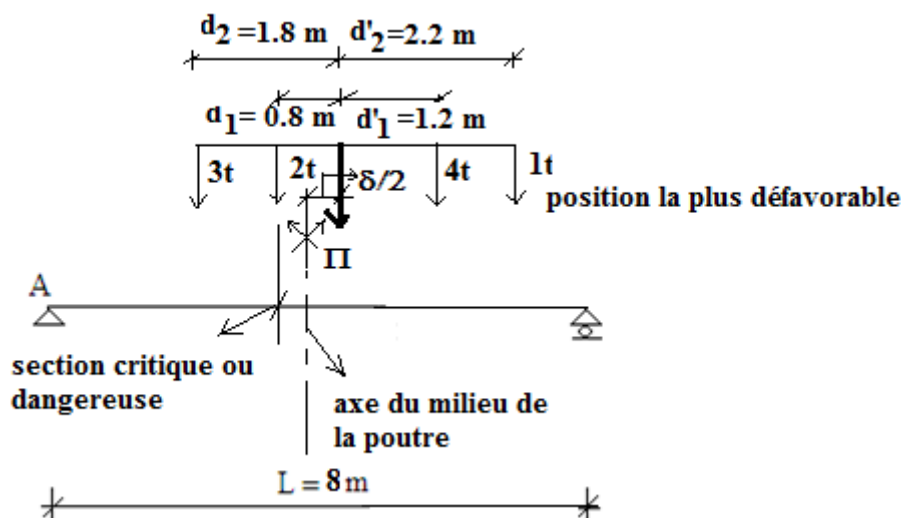
On choisit d'abord l'essieu le plus proche de la résultante, en vertu de la relation de M_{imax} c'est-à-dire l'essieu de 2t, donc :

$$M_{imax} = \frac{\Pi L}{4} \left[1 - \frac{d_i}{l} \right]^2 - \sum_{k>i} P_k (d_k - d_i) = \frac{(10)(8)}{4} \left[1 - \frac{0,8}{8} \right]^2 - (3)(1) = 13.2 \text{ tm}$$

Si on choisit l'essieu de 3t

$$M_{imax} = \frac{(10)(8)}{4} \left[1 - \frac{1,8}{8} \right]^2 = 12.01 \text{ tm}$$

Les autres cas ne sont pas défavorables, la seule position défavorable est celle de la figure ci-dessous avec $M_{2max} = 13.2 \text{ tm}$ et la section dangereuse est sous l'essieu de 2t à 0,4 m de l'axe de la poutre.



EXERCICE N° 3

1. Tracé des lignes d'influences des réactions d'appui.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_{/B} = R_A * 4L - 1(4L - \alpha) = 0 \Rightarrow R_A = \left(1 - \frac{\alpha}{4L}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow R_A = 1 \\ \alpha = 4L \Rightarrow R_A = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 1 \Rightarrow R_B = 1 - R_A = \frac{\alpha}{4L} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow R_B = 0 \\ \alpha = 4L \Rightarrow R_B = 1 \end{cases}$$

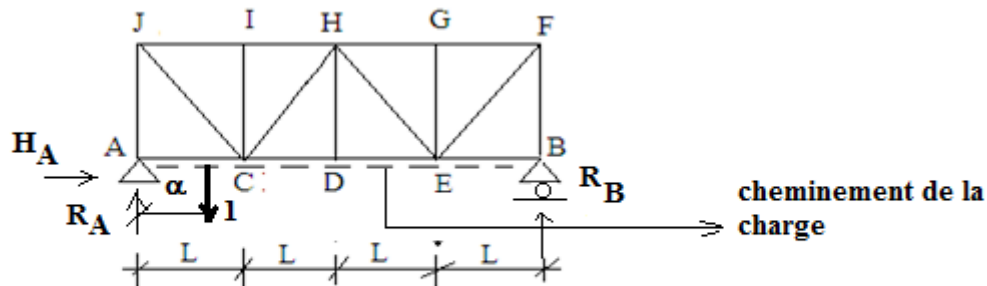


Figure 3.1: Treillis isostatique sous charge unitaire

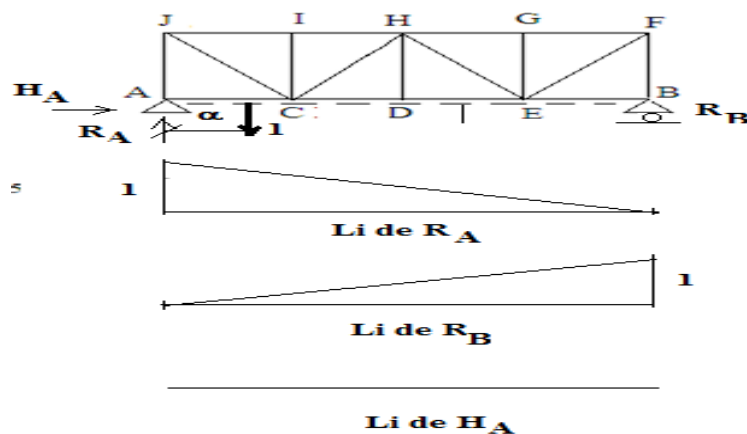


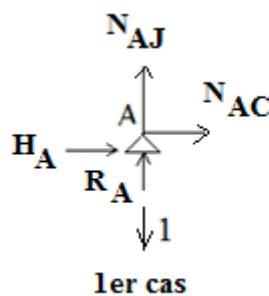
Figure 3.2: Lignes d'influence des réactions d'appui

2. Les lignes d'influences des efforts normaux dans les barres AJ et IH

a) Ligne d'influence de N_{AJ}

On isole le nœud A et on considère 2 cas :

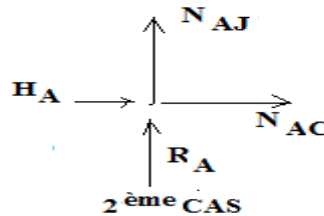
- 1^{er} cas : La charge unitaire est appliquée au nœud A



$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow R_A - 1 + N_{AJ} = 0 \Rightarrow N_{AJ} = -R_A + 1 = \frac{\alpha}{4L}$$

Dans ce cas $\alpha = 0 \Rightarrow N_{AJ} = 0$

- 2^{ème} cas : La charge unitaire n'est appliquée au nœud A



2^{ème} CAS

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow R_A + N_{AJ} = 0 \Rightarrow N_{AJ} = -R_A = -1 + \frac{\alpha}{4L}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = L \Rightarrow N_{AJ} = -\frac{3}{4} \\ \alpha = 2L \Rightarrow N_{AJ} = -\frac{1}{2} \\ \alpha = 3L \Rightarrow N_{AJ} = -\frac{1}{4} \\ \alpha = 4L \Rightarrow N_{AJ} = 0 \end{array} \right.$$

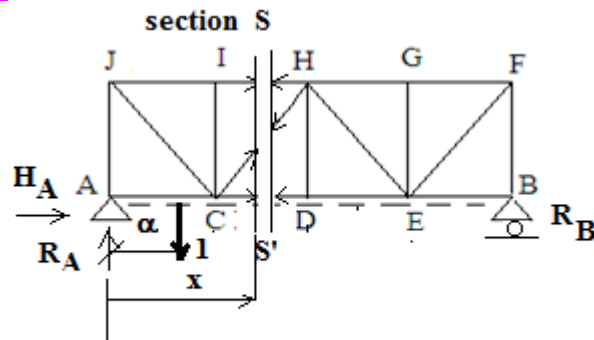
b) Ligne d'influence de N_{IH}

On applique la méthode de Ritter ou des sections

- Le point de Ritter : $CH \cap CD = C$

On considère 2 cas :

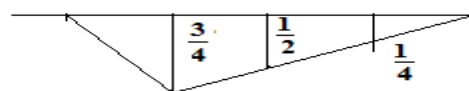
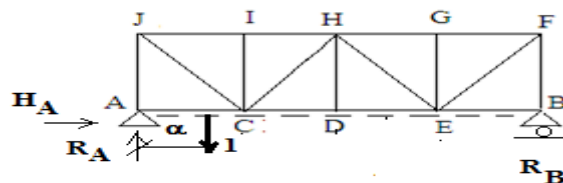
- 1^{er} cas $\alpha < x$



1^{er} cas

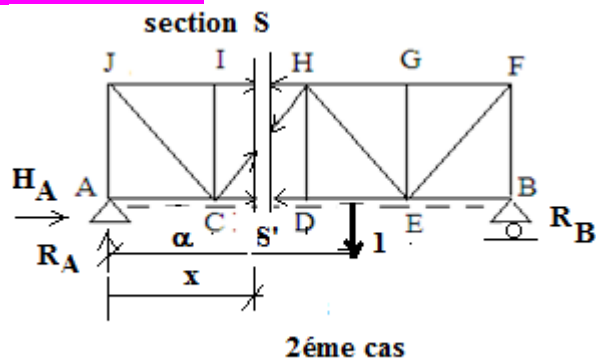
$$\sum M_{C\text{droit}} = R_B 3L + N_{HI} = 0 \Rightarrow N_{HI} = -R_B L = \frac{3\alpha}{4}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \Rightarrow N_{IH} = 0 \\ \alpha = L \Rightarrow N_{IH} = -\frac{3}{4} \end{array} \right.$$



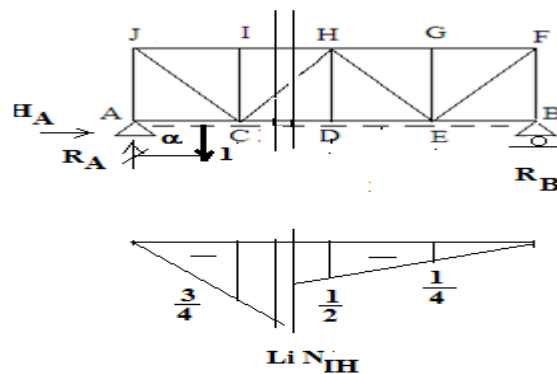
Li de N_{AJ}

2ème cas $\alpha > x$

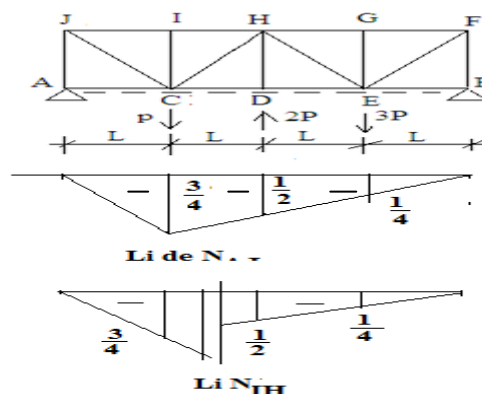


$$\sum M_{C\text{gauche}} = R_A L + N_{IH} L = 0 \Rightarrow N_{IH} = -R_A = -1 + \frac{\alpha}{4L}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2L \Rightarrow N_{IH} = -\frac{1}{2} \\ \alpha = 3L \Rightarrow N_{AJ} = -\frac{1}{4} \\ \alpha = 4L \Rightarrow N_{AJ} = 0 \end{cases}$$



3. Calculer à l'aide des lignes d'influences ces efforts normaux pour le chargement appliqué



$$N_{AJ} = \sum_1^n P_i y_i = P \left(-\frac{3}{4} \right) + (-2P) \left(-\frac{1}{2} \right) + 3P \left(-\frac{1}{4} \right) = N_{IH} = -\frac{P}{2} \text{ (compression)}$$

