

Exercice 1: Soit la fonction définie par :

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

- a) Calculer les d.p. ds l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Calculer $f'_x(0, 0)$ et $f'_y(0, 0)$.
- b) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. f est-elle de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2: Soit $f \in C^2$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$. On passe en coordonnées polaires et on note: $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- a) Montrer que :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

- b) Supposons que f est invariante par rotation, c-à-d :
 $g(r, \theta) = \phi(r)$. Résoudre l'équation $\Delta f = 0$.

Exercice 3: Dans une fonction $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ de classe C^2 , on effectue le changement de variable: $x + ay = u$, $x - ay = v$ et $f(x, y) = F(u, v)$.

- a) Exprimer les d.p. premières et secondes de f à l'aide de celles de F .

- b) Calculer $a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des d.p. de F .

- c) Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 4 : Trouver toutes les fonctions $f(x, y, z) = \varphi(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, telles que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Exercice 5 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fct différentiable et homogène de degré $n \in \mathbb{N}$, montrer alors que :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n f(x, y).$$

Exercice 6 : Soient la fonction f définie de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2z)$ et g une fonction de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}^3$ par :

$$g(x, y) = (x^2 + y, xy, \exp(y)).$$

- Donner les matrices jacobiniennes de g et de f .
- Trouver la matrice jacobienne de $g \circ f$ de deux façons (calcul direct et la formule de composition).

Extrema, théorème des fcts implicites

Exercice 1 : Etudier la nature (min loc, max loc, point selle) des éventuels points critiques de fcts suivantes :

- a) $f(x, y) = 3x^3 - 9x + 2y + y^2$ de finie sur $\mathbb{R}^2$.
 b) $f(x, y) = y^2 + xy \ln x$ de finie sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$.
 c) $f(x, y) = x^2 + \sqrt{1-x^2} \cos y$ de finie sur $] -1, 1[\times] -\pi, \pi[$.
 d) $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + y - z + yz$ de finie sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 : a) Montrer que la relation : $e^{x-y} - x - y - 1 = 0$ définit une fct $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0, 0)$, puis donner un développement limité à l'ordre 2 de $\varphi(x)$ au voisinage de 0 et calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2}$.

- b) Montrer que la relation : $x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz = 0$ définit une fct $z = \varphi(x, y)$ au voisinage de $(1, 2, 3)$.
 Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en ce point.

Exercice 3 : Chercher un développement limité (à l'ordre 2) au voisinage de $(1, 1)$ de la fct implicite.

$y = \varphi(x)$ de finie par : $xy + \ln y = y$.

Exercice 4: Soit la fct $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de forme

par $(x, y) \longrightarrow (x+y, xy)$.

a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle. Quels sont les points où le jacobien de f est nul.

b) Montrer que la restriction de f à l'ouvert U défini par: $|y| < |x|$ est une bijection de U sur un ouvert W que l'on déterminera, déterminer la réciproque de $f|_U$ et sa diff.