

Compliment de cours /

(1)

• Difféomorphisme

Voici une notion classique qui est utilisée dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles et dans les intégrales multiples, pour faire des changements de variables.

Définition : si f est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, et si la bijection réciproque f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que f est un difféomorphisme de U sur V .

Remarque : - Il résulte du théorème de composition (des applications différentiables), que la matrice Jacobienne de f est inversible en tout point $a \in U$ et que $\text{Le Jacobien de } f^{-1}$

au point $f(a) \in V$ est la matrice inverse :

$$J_{f^{-1}}(f(a)) = [J_f(a)]^{-1}$$

Exemple 1 : Déterminer des ouverts sur lesquels le changement de variables : $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = y$ est un difféomorphisme.

Solution : La fct : $\phi : (x, y) \mapsto (u, v)$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
Cherchons à quelle condition il est possible de résoudre : $\phi(x, y) = (u, v)$ - c-à-dire de déterminer x et y en fonction de u et v ?

$$\phi(x, y) = (x^2 - y^2 - 2xy, y) = (u, v).$$

$$y = v, \quad x^2 - y^2 - 2xy - u = 0$$

$$\Leftrightarrow (y = v, \quad x^2 - 2vx - v^2 - u = 0) \quad \text{--- (1)}$$

on cherche les sol x / $x^2 - 2vx - (v^2 + u) = 0$

$$\Delta' = v^2 + v^2 + u = 2v^2 + u \geq 0 \text{ et } x = v \pm \sqrt{u + 2v^2}.$$

on veut que...

(3)

i) Tout pt de l'ouvert : $\{(u,v) : u+2v^2 > 0\} = V$
est l'image d'un unique point de l'ouvert

$$U_1 = \{(x,y) : x > y\} : \text{à savoir}$$

$$(x,y) = (v + \sqrt{2v^2 + u}, v)$$

et $\phi : U_1 \longrightarrow V$ est une bijection de
classe $\mathcal{C}^1$.

ii) De même : tout pt de l'ouvert :
 $V = \{(u,v) : u+2v^2 > 0\}$ est l'image d'un
unique point de l'ouvert :

$$U_2 = \{(x,y) : x < y\}, \text{ à savoir :}$$

$$(x,y) = (v - \sqrt{u+2v^2}, v) \text{ et}$$

$\phi : U_2 \longrightarrow V$ est une bijection de

classe $\mathcal{C}^1$.

Donc f est un difféomorphisme.

Le théorème d'inversion

(4)

on cherche à résoudre $y = f(x)$ sous la forme
 $x = g(y)$.

a) Inversion locale :

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie
au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$, à valeurs de $\mathbb{R}^n$
i.e. : $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $b = f(a)$

Théorème 1 : Si la différentielle $Df(a)$ est
invertible, alors il existe un voisinage A de a
et un voisinage B de b tels que f soit un
difféomorphisme de A sur B .

b) Inversion globale

Théorème 2 : Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur
un ouvert Ω , injective et telle que
la ~~difféomorphisme~~ différentielle $Df(x)$
soit invertible pour tout $x \in \Omega$. Alors
 $f : \Omega \longrightarrow f(\Omega)$ est un difféomorphisme.

Exemple 2 : Montrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ ds lui m^e définie par :

(5)

$$\phi(x, y) = (x + y^2 + 2yx^3 + x^6, 2y + 2x^3)$$

est un difféomorphisme.

Corrigé : 1) On montre que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, nous devons trouver un couple unique $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$u = x + y^2 + 2yx^3 + x^6, \quad v = 2(y + x^3). \quad (1)'$$

En remarquant que : $y^2 + 2yx^3 + x^6 = (y + x^3)^2$.

Le système (1)' est équivalent à :

$$\begin{cases} u = x + (y + x^3)^2 \\ v = 2(y + x^3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x + (v/2)^2 \\ y + x^3 = v/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = u - v^2/4 \\ y = v/2 - (u - v^2/4)^3 \end{cases} \quad \underline{\text{est unique}}.$$

2° ϕ est une application de classe $\mathcal{C}^1$,

et mⁱ pour ϕ^{-1} (expressions polynomiales)

calculons le Jacobien de ϕ en (x, y) :

(la matrice Jacobienne)

$$J_{\phi}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y))$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 6yx^2 + 6x^5 & 2y + 2x^3 \\ 6x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|J_{\phi}(x, y)| = \det J_{\phi}(x, y) = 2(1 + 6yx^2 + 6x^5) - 6x^2(2y + 2x^3) = \boxed{2}$$

Exercice : Soit $\Omega = \{(u, v) \mid u > 0, v > 0\}$ et $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

définie par : $g(u, v) = (\sqrt{uv}, \frac{u-v}{2})$

1°) Montrer que $g: \Omega \rightarrow H$ est une bijection.

ou $H = \{(x, y) \mid x > 0\}$ et déterminer g^{-1} .

2°) Montrer que g est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Donner son Jacobien.