

**UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA  
FACULTE DES SCIENCES DE LA TERRE  
DEPARTEMENT DE GEOLOGIE  
LICENCE DE GEOLOGIE APPLIQUEE  
SPECIALITE HYDROGEOLOGIE**

# Cours d'hydrodynamique souterraine

---

Pr CHAAB S.

Année 2020

**Définition**

L'hydrodynamique souterraine est une branche de l'hydrogéologie. Elle a pour but l'étude des lois qui régissent l'écoulement souterrain (dans l'écorce terrestre) et d'élaborer à cet effet les bases mathématiques et les méthodes d'évaluation quantitative des conditions de formations des eaux souterraines et de faire un planning de gestion des ressources en eau, tout en tenant compte de la variation de leur qualité.

**Les principaux types d'écoulement des eaux souterraines**

Les principaux types d'écoulement des eaux souterraines dans les formations géologiques sont :

- La migration
- L'humidification
- La filtration

La migration

La migration est définie comme le déplacement des particules d'eau dans les pores et les microfissures, suivi de variations physico-chimiques de l'eau dues aux échanges entre la roche et l'eau.

L'étude de la migration des eaux souterraines devient nécessaire pour évaluer qualitativement leur composition chimique lors de leur déplacement dans les roches. Cette étude peut résoudre des problèmes liés à la formation physico-chimiques des eaux souterraines, à la pollution des eaux souterraines, au stockage des eaux résiduaires, à la migration des éléments des minerais.

L'humidification

L'eau qui tombe à la surface du sol commence par humidifier la partie supérieure du sol (quelques cm). Cette eau est retenue en surface tant que les forces de capillarité sont supérieures aux forces de gravité. Quand la teneur en eau dépasse une valeur limite, appelée capacité de rétention spécifique, l'eau se propage vers le bas et humidifie une zone plus profonde.

La teneur en eau dépend de la porosité et de la perméabilité du sol. En dessous d'une certaine côte (appelée niveau piézométrique) la teneur en eau n'augmente plus avec la profondeur car tous les vides (pores) du sol contiennent de l'eau, le sol est dit saturé. Par

contre au dessus de ce niveau, le sol est dit non saturé, car les pores peuvent contenir simultanément de l'eau et de l'air. Toute la partie du sol se trouvant au dessus de ce niveau est appelée zone d'aération.

Si la pluie persiste pendant longtemps l'humidification devient tellement importante que l'eau commence à arriver à la nappe, car les forces de gravité prédominent sur les forces de capillarité. Ce processus est lent et dépend de la profondeur du sol et de sa perméabilité. Ce processus s'appelle l'infiltration.

### La filtration

La filtration des eaux souterraines est le type d'écoulement le plus répandu. Elle se caractérise par un écoulement de l'eau gravifique dans un milieu poreux ou fissuré. La force agissante est la force hydrostatique. Les échanges physico-chimiques entre l'eau et la roche ne sont plus pris en considération. Les principaux paramètres hydrodynamiques sont :

- La charge hydrostatique H ;
- Le gradient hydraulique I ;
- La vitesse d'écoulement v ;
- Le débit de la nappe Q ;
- Le chemin parcouru par l'eau L ;
- La section de l'écoulement F.

### **Les bases de l'hydraulique souterraine**

Dans les conditions de filtration la principale force agissante est la force de gravitation, caractérisée par le potentiel de gravitation  $\varphi$  qui représente l'énergie des forces de gravitation par unité de volume.

$$\varphi = P + \gamma Z \quad (1)$$

Où P – pression hydrostatique,  $\gamma$  – poids volumique et Z ordonnée par rapport de la surface de référence.

Si on considère que le poids volumique est faible, on peut passer à la notion de charge hydrostatique.

$$H = \frac{\varphi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z \quad (2)$$

H s'exprime en mètre et caractérise le niveau de l'énergie potentielle pour un point donné du courant et dépend de la pression potentielle  $\frac{P}{\gamma}$  et de la cote z.

Le niveau de l'énergie cinétique  $E = \frac{mv^2}{2}$  du courant est caractérisé par la pression cinétique  $h_v = \frac{v^2}{2g}$ . Ainsi l'énergie totale a été établie par Bernoulli et est définie comme la pression hydrostatique.

$$H = \frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \quad (3)$$

Les différentes composantes de la charge hydrodynamique sont représentées dans le schéma ci-dessous.

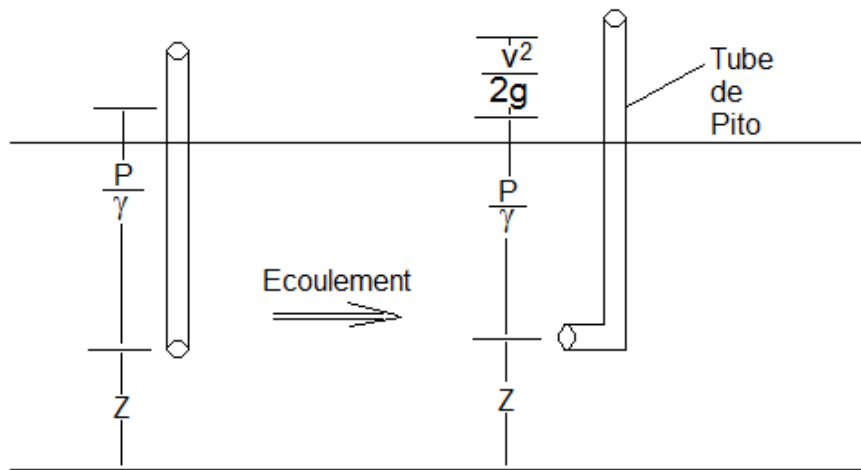


Fig. 1 : Interprétation géométrique des composantes de la charge hydrodynamique.

### La loi de Darcy (H. Darcy, 1856).

En hydrodynamique souterraine la loi expérimentale de Darcy (H. Darcy, 1856) représente la base fondamentale du calcul des quantités d'eau ou débit d'eau d'une nappe.

Le dispositif expérimental comporte un tube cylindrique rempli de sable naturel sur une longueur  $L$ . La partie haute du tube est alimentée en eau et maintenue à une altitude constante,  $H$ , au dessus d'un plan fixe de référence. Le débit est recueilli à l'aval du tube et mesuré en fonction du temps, en secondes par exemple (figure 2).

## Dispositif expérimental

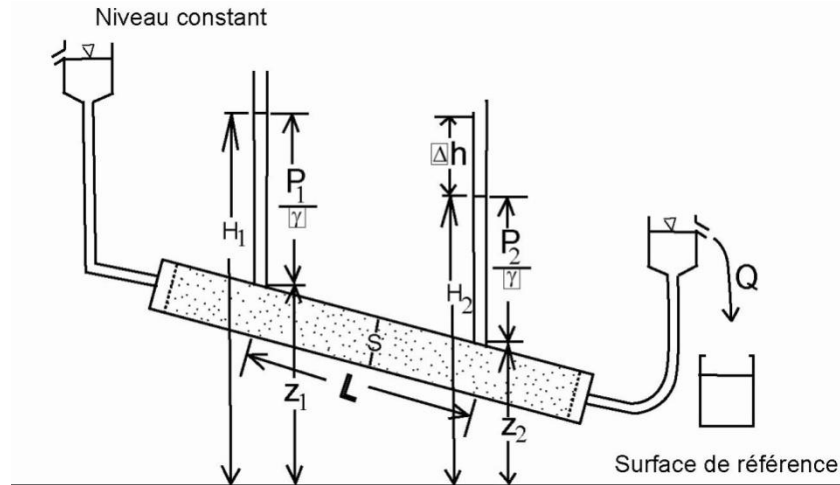


Figure 2: dispositif expérimental de la loi de Darcy

Si nous réalisons deux piézomètres dans une nappe aquifère tels que nous le montre la figure 3 ci-dessus et que nous comparons les côtes des niveaux piézométriques observés, nous nous apercevrons que l'eau s'écoule du piézomètre où la côte est la plus élevée vers celui où elle est la plus faible.

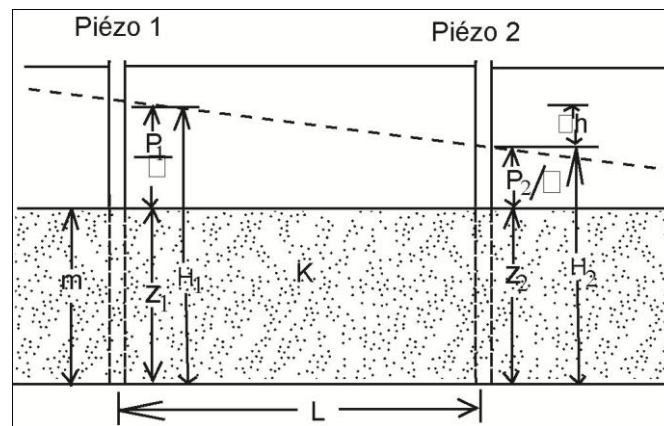


Figure 3: représentation de la loi de Darcy dans un aquifère.

Darcy montre en effet que la vitesse  $U$  de circulation (et le débit) de l'eau dans le tube de sable est proportionnelle à la différence de charge  $H_1 - H_2$ . Cette vitesse  $v$  est calculée comme si toute la section du tube de sable était offerte à l'écoulement de l'eau :

$$Q = K \times S \times \left( \frac{H_1 - H_2}{L} \right) \quad \text{et} \quad v = \frac{Q}{S} = K \times \left( \frac{H_1 - H_2}{L} \right) = -k \times \text{grad}(H) \quad (4)$$

$v$  est la vitesse apparente de Darcy, car l'eau ne circule que dans les pores et la section réelle disponible est  $n_e \cdot A$  (porosité efficace); d'autres parts, les pores ne sont pas disposés d'une façon rectiligne et l'eau fait de nombreux détours. C'est ce qu'on appelle la tortuosité du milieu.

Cette loi met en relation le débit d'une nappe avec la perte de charge :

$$Q = K \times S \times \frac{\Delta H}{L} \quad (5)$$

Le terme K, défini par Darcy comme un coefficient, dépendant de la perméabilité de la couche, est appelé coefficient de perméabilité.

Le quotient de la charge,  $\Delta h$ , par la longueur de la colonne de sable, L, ou perte de charge par unité de longueur,  $\frac{\Delta h}{L}$ , est défini comme le gradient hydraulique noté I. L'expression précédente devient :

$$Q = K \times S \times I \quad \text{en m}^3/\text{s} \quad (6)$$

La vitesse de filtration, v en m/s, rapportée à la section totale, S

$$v = \frac{Q}{S} = K \times i \quad (7)$$

est fictive, car elle ne tient pas compte de la surface des pores où l'eau circule. Nous pouvons la relier en introduisant le facteur  $n_a$  qui caractérise la surface des pores à travers lesquels s'écoule l'eau.

$$U = \frac{v}{n_a} \quad (8)$$

L'insignifiance de la vitesse de filtration nous permet de négliger la valeur de la pression cinétique  $h_v = \frac{v^2}{2g}$  et ainsi la charge hydrodynamique devient égale à la charge hydrostatique H. Nous excluons ainsi les forces d'inertie.

La loi de Darcy a un large domaine d'application, cependant il existe des conditions où cette loi ne peut être appliquée.

La limite supérieure de son application est constatée dans les roches de forte perméabilité où les vitesses de filtration sont très grandes. Dans sa forme généralisée, la loi de Darcy peut s'écrire sous la forme suivante :

$$I = av + bv^2 = \frac{v}{k}(1 + \alpha v) \quad (9)$$

D'où  $a = \frac{1}{k}$  et  $b = \frac{\alpha}{k}$  paramètres de filtration

k – coefficient de perméabilité et  $\alpha$  - coefficient de non linéarité de filtration.

Pour des vitesses faibles, le membre  $bv^2$  devient négligeable par rapport à  $av$ . Nous avons dans ce cas une filtration linéaire.

Pour des vitesses fortes, le membre  $bv^2$  devient plus important qu' $av$ . Ces conditions s'observent au voisinage des ouvrages de captage et dans les réseaux karstiques.

Pour des vitesses extrêmement faibles, dues aux forces moléculaires entre les particules d'eau et la roche dans les pores ultra fins, la loi de Darcy n'est plus applicable.

La loi de Darcy est établie par des expériences de laboratoire répondant à des conditions très strictes telles que :

- Ecoulement laminaire
- Continuité
- Isotropie
- Homogénéité du réservoir.

L'écoulement laminaire est caractérisé par des lignes de flux continues, rectilignes, individualisées et occupant entre elles la même position relative. Les vitesses, constantes et parallèles, sont inférieures à la vitesse critique au delà de laquelle l'écoulement devient turbulent.

### **Le milieu de filtration et ses principaux paramètres.**

Le milieu de filtration représente la roche et le liquide filtrant. Il est caractérisé par ses propriétés aquifères, telles que le coefficient de perméabilité, la porosité ou le coefficient d'emmagasinement, ainsi que par les propriétés physiques des eaux souterraines telles que la densité et la viscosité.

#### ***La perméabilité***

La perméabilité est l'aptitude d'un réservoir à se laisser traverser par l'eau sous l'influence d'un gradient hydraulique. Elle exprime la résistance du milieu à l'écoulement de l'eau qui le traverse. Elle est composée de deux éléments : le coefficient de perméabilité et la perméabilité intrinsèque.

Le coefficient de perméabilité, noté  $K$ , est défini par la loi de Darcy. C'est le volume d'eau gravitaire en  $m^3$  traversant en une unité de temps  $s$  sous l'effet d'une unité de gradient hydraulique à travers une unité de section en  $m^2$  orthogonale à la direction de l'écoulement

dans les conditions de validité de la loi de Darcy. Il a la dimension d'une vitesse et s'exprime en  $m/s$ .

La perméabilité intrinsèque, notée  $k$ , représente le volume du liquide en d'unité de viscosité cinématique (centipoise) traversant en une unité de temps  $s$  sous l'effet d'une unité de gradient hydraulique, une unité de section en  $m^2$  orthogonale à la direction de l'écoulement. Elle s'exprime en Darcy ou en  $m^2$ . Elle est appelée parfois perméabilité géométrique. Le **darcy** est la perméabilité d'un milieu débitant  $1 \text{ cm}^3/s$  à travers une section de  $1 \text{ cm}^2$  sous un gradient hydraulique, normal à cette surface, de 1 atmosphère par  $cm$ .

$$k = \frac{\mu \frac{Q}{dP}}{l}, \quad (10) \quad \text{avec} \quad 1 \text{ Darcy} = \frac{1 \text{ centipoise} \times 1 \text{ cm}^3/s}{\frac{1 \text{ cm}^2}{1 \text{ atm}} \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}}$$

D'où  $1 \text{ centipoise} = 0,01 \text{ Din/s/cm}^2$ ;

$1 \text{ atmosphère} = 1,0132 \cdot 10^6 \text{ Din/cm}^2$ ;

$1 \text{ darcy} = 0,987 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2$ .

#### Les facteurs du coefficient de perméabilité

Le coefficient de perméabilité est fonction de  $\gamma$  (poids volumique),  $\mu$  (viscosité dynamique),  $d$  (diamètre des grains), ainsi que de  $C$  correspondant au facteur de forme, (caractéristiques granulométriques, forme et arrangement des grains).

$$\text{Ainsi} \quad K = C \cdot \gamma^{x_1} \cdot \mu^{x_2} \cdot d^{x_3} \quad (11)$$

Toutes les valeurs de cette équation peuvent être exprimées soit en masse  $[M]$ , longueur  $[L]$  et temps  $[T]$ .

Les dimensions seront exprimées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} K &= [M]^0 [L]^1 [T]^{-1} \\ \gamma &= [M]^1 [L]^{-2} [T]^{-2} \quad (12) \\ \mu &= [M]^1 [L]^{-1} [T]^{-1} \\ d &= [L]^1 \end{aligned}$$

Si nous posons

$$[M]^0 [L]^1 [T]^{-1} = C \times \left[ \frac{[M]^1}{[L]^2 [T]^2} \right]^{x_1} \times \left[ \frac{[M]^1}{[L]^2 [T]^2} \right]^{x_2} \times [L]^{x_3} \quad (13)$$



Pour trouver  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , nous posons un système à 3 équations

$$\begin{aligned} [M] &\longrightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ [L] &\longrightarrow -2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ [T] &\longrightarrow -2x_1 - x_2 = -1 \end{aligned} \quad (14)$$

Le système d'équation a pour solution

$$x_1 = 1 ; \quad x_2 = -1 \quad \text{et} \quad x_3 = 2$$

Nous pouvons donc écrire que

$$K = C \cdot d^2 \cdot \frac{\gamma}{\mu} \quad (15)$$

Le coefficient de perméabilité comporte deux couples de résistance à l'écoulement, correspondant à deux groupes de facteurs : les caractéristiques du réservoir  $C \cdot d^2$  et les caractéristiques du fluide  $\frac{\gamma}{\mu}$ .

La perméabilité intrinsèque du milieu poreux est représenté par

$$k = C d^2 \quad (16)$$

La relation qui existe entre le coefficient de perméabilité  $K$  et la perméabilité intrinsèque  $k$  s'exprime ainsi :

$$K = k \cdot \frac{\gamma}{\mu} \quad (17)$$

Les valeurs moyennes du coefficient de filtration  $K$  et de perméabilité intrinsèque  $k$  sont représentées dans le tableau ci-dessous

Tableau 1 : valeurs moyenne du coefficient de perméabilité.

Nature de la roche	K en cm/s	K en darcy
Graviers	$10^2 - 1$	$10^5 - 10^3$
Sables	$1 - 10^{-3}$	$10^3 - 1$
Sables fins et sable argileux	$10^{-3} - 10^{-6}$	$1 - 10^{-3}$

### Les propriétés d'emménagement des roches

Les propriétés d'emménagement des roches sont caractérisées par la capacité des roches à se saturer ou à libérer de l'eau sous l'effet d'un abaissement unitaire du niveau piézométrique, entraînant une différence de charge  $\Delta h$ .

- Dans un aquifère à nappe libre l'eau est libérée par l'action de la force de gravité (drainage).
- Dans un aquifère à nappe captive par l'expulsion de l'eau provoquée par des actions d'élasticité de l'eau et de du solide (détente de l'eau et déformation du solide).

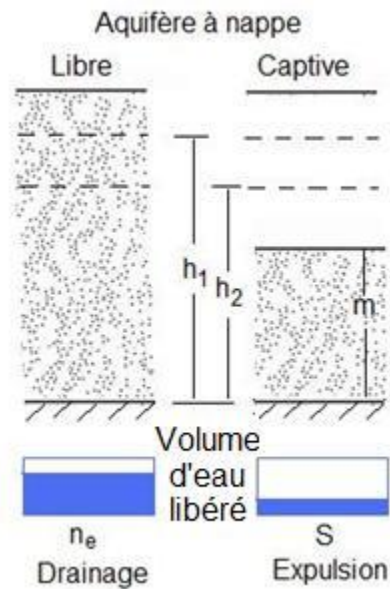


Figure 4 : Représentation des caractéristiques d'emmagasinement.

Les modules d'élasticité étant faibles, le volume libéré est beaucoup plus petit pour une nappe captive, à caractéristiques égales avec une nappe libre.

Le coefficient d'emmagasinement (storage coefficient), noté  $S$ , sans dimension, est le rapport d'eau libéré ou emmagasiné, par unité de surface de l'aquifère  $m^2$  à la variation de charge hydraulique correspondante.

$$S = \frac{\Delta V_0 / m^2}{\Delta h}$$

### Récapitulatif

La capacité du réservoir est déterminée par deux paramètres selon les méthodes de leur mesure :

- La porosité efficace représente le rapport du volume d'eau gravitaire libéré par égouttage d'un échantillon au laboratoire, au volume total ;
- Le coefficient d'emmagasinement, exprimant le volume d'eau libéré ou emmagasiné, par unité de surface de l'aquifère, à la variation de charge hydraulique correspondante. Il est mesuré sur le terrain par essai de pompage.

### **Loi de réfraction des lignes de courant d'eau et ses conséquences.**

Le phénomène de réfraction des lignes de courant d'eau souterraine dans un système aquifère multicouche a été expérimentalement établi dans les années 20-30. Il a été décrit par Kamenski G.N. et Bear J.

Dans un système aquifère multicouche, il arrive fréquemment que l'écoulement traverse des zones de perméabilité différentes. Sur les limites de ces zones ou de ces couches, les lignes de courant subissent une réfraction.

La surface de séparation entre deux zones ou deux couches de perméabilités différentes, peut être considérée comme une limite intérieure sur laquelle se raccordent deux écoulements distincts. La vitesse de filtration et la charge hydraulique sont soumises à des conditions de continuité.

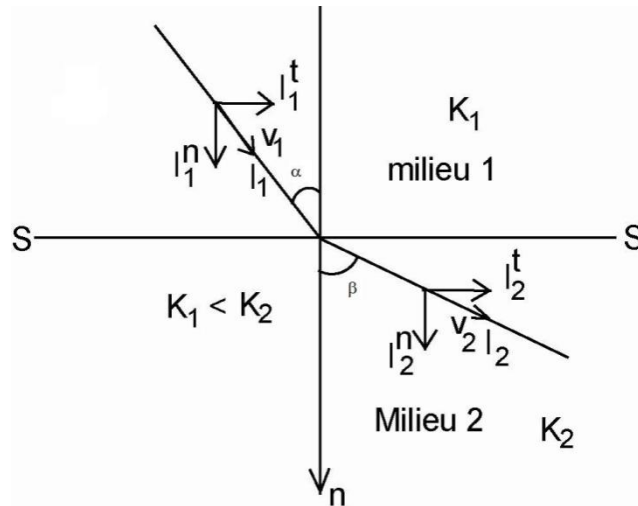


Figure 5: représentation de la réfraction de l'écoulement.

Pour expliquer cette réfraction il est indispensable de montrer la relation des angles  $\alpha$  et  $\beta$  formés par la normale  $\mathbf{n}$  et les vitesses  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  (lignes de courant). Du fait de l'égalité des projections de la vitesse de filtration sur la normale, nous avons :

$$v_1 \cos \alpha = v_2 \cos \beta \quad \text{ou} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (18)$$

Si nous tenons compte de la condition d'égalité de la projection de ces vitesses sur la tangente vers la limite de ces 2 milieux, nous aurons :

$$v_1 \sin \alpha = -k_1 \frac{\delta h}{\delta l} \quad \text{et} \quad v_2 \sin \beta = -k_2 \frac{\delta h}{\delta l} \quad (19)$$

De cette relation nous pouvons écrire :

$$\frac{\delta h}{\delta l} = \frac{v_1 \sin \alpha}{k_1} = \frac{v_2 \sin \beta}{k_2} \quad (20)$$

Si nous considérons le rapport  $\frac{v_1}{v_2}$  de la relation précédente (18), la condition de la réfraction du courant à la limite de ces deux milieux, sera établie comme suit :

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \quad \text{ou} \quad k_1 \tan \beta = k_2 \tan \alpha \quad (21)$$

De ces deux dernières relations nous pouvons constater que dans le cas où le courant traverse une couche de faible perméabilité sa trajectoire devient presque verticale, mais dans le cas où le courant traverse une couche de bonne perméable la trajectoire du courant devient plus horizontale, ceci du fait que l'angle  $\beta$  devient plus grand que l'angle  $\alpha$ . Dans ce dernier cas l'écoulement aura tendance à suivre le sens de la couche.

Dans le cas où l'écoulement s'effectue perpendiculairement aux couches  $\cos\alpha = \cos\beta = 1$ , les composantes normales du gradient seront complètes, nous aurons  $I_1^n = I_1$  et  $I_2^n = I_2$ . Dans ce cas vu que  $v_1 = v_2$  donc :

$$k_1 \cdot I_1 = k_2 \cdot I_2 \quad (22)$$

Dans le cas où l'écoulement s'effectue parallèlement aux couches, les gradients dans chaque couche seront les mêmes vu que leurs composantes normale seront nulles, alors que les composantes tangentielles auront une valeur complète. Dans ce cas la vitesse de filtration dans chaque couche seront différentes et seront proportionnelles à la valeur de leur coefficient de perméabilité respectifs.

$$l_1 = l_2 = l \quad \text{où} \quad v_1 = k_1 \cdot l \quad \text{et} \quad v_2 = k_2 \cdot l \quad (23)$$

Les conséquences de cette loi ont été utilisées pour schématiser les conditions hydrogéologiques et établir les équations décrivant la filtration des eaux souterraines dans les couches hétérogènes. Ces conséquences ont été utilisées pour déterminer la valeur moyenne du coefficient de perméabilité des systèmes multicouches.

Pour ces cas précis, les valeurs moyennes du coefficient de perméabilité se calculent ainsi :

- Pour un écoulement perpendiculaire aux couches

$$K_{\text{perpendiculaire}} = \frac{\sum_1^n m_i}{\sum_1^n \frac{m_i}{k_i}} \quad (24)$$

- Pour un écoulement parallèle ou dans le sens des couches

$$K_{\text{parallèle}} = \frac{\sum_1^n k_i m_i}{\sum_1^n m_i} \quad (25)$$

### L'équation du mouvement des eaux souterraines

L'équation du mouvement des eaux souterraines représente la loi fondamentale de la filtration. Pour un courant dont la densité reste constante, nous pouvons prendre l'équation de Darcy dans sa forme généralisée, qui exprime l'expression du gradient suivant les trois coordonnées de l'espace. Les composantes de la vitesse selon les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans un milieu anisotrope sont  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$  et s'écrivent ainsi :

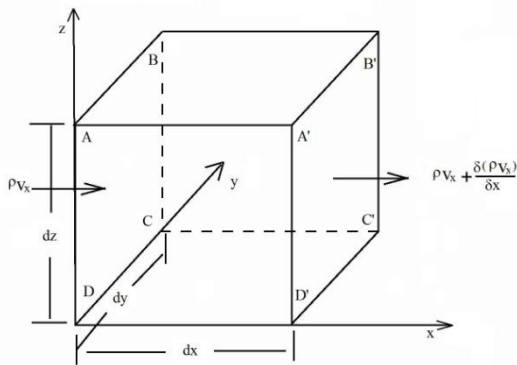
$$v_x = -k_x \frac{\delta h}{\delta x}, \quad v_y = -k_y \frac{\delta h}{\delta y} \quad \text{et} \quad v_z = -k_z \frac{\delta h}{\delta z} \quad (26)$$

$K_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  sont les coefficients de perméabilité suivant les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

## Notions sur les équations différentielles régissant la filtration des eaux souterraines

### L'équation de la continuité

Cette loi exprime que « rien ne se perd rien ne se crée », c'est-à-dire que la masse du fluide se conserve lors de l'écoulement. En pratique, cela revient à dire que dans une masse de fluide entrant ou sortant, dans l'unité de temps d'un volume infiniment petit est égal à la variation de densité du fluide dans ce volume.



Soit donc le parallélépipède élémentaire ABCDA'B'C'D' dont les faces sont orientées 2 à 2 parallèlement au plan de coordonnées. Le volume de ce parallélépipède est constant d :

$$V = dx \cdot dy \cdot dz = \text{constant}$$

La masse du fluide en fonction de la densité

$$dM = \rho \cdot dV = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (27)$$

pendant le temps  $dt$  :

- Il entre par la face ABCD une masse du fluide

$$M_x^1 = \rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (27a) \quad \text{avec } \rho - \text{densité du fluide}$$

- Il sort par la face A'B'C'D' une masse de fluide de

$$M_x^2 = \rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt + \frac{\delta(\rho v_x)}{\delta x} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (27b)$$

$$\vec{V} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \quad \text{vitesse du fluide à l'entrée du parallélépipède}$$

La différence de masse du fluide entrant et sortant du parallélépipède est de :

$$dM_x = M_x^1 - M_x^2 = -\frac{\delta(\rho v_x)}{\delta x} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (28)$$

Nous pouvons faire le même raisonnement pour déterminer la variation de masse correspondante aux mouvements à travers les autres faces et établir 2 formules analogues nous aurons :

$$dM = -\left( \frac{\delta(\rho v_x)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v_y)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho v_z)}{\delta z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (29)$$

Si nous considérons maintenant  $\rho$  en fonction du temps, nous avons dans le parallélépipède :

- Au temps  $t$   $\rho = \rho$
- Au temps  $t+dt$   $\rho + d\rho = \rho + \frac{\delta\rho}{\delta t} dt$

Si bien que l'augmentation de masse du fluide à l'intérieur du parallélépipède est de  $\frac{\delta\rho}{\delta t} dxdydzdt$  est la diminution est de  $-\frac{\delta\rho}{\delta t} dxdydzdt$

$$d'où dM = \frac{\delta\rho}{\delta t} dxdydzdt \quad (30)$$

Si on égalise les équations (29) et (30) nous aurons :

$$-\left(\frac{\delta(\rho v_x)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v_y)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho v_z)}{\delta z}\right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = \frac{\delta\rho}{\delta t} dxdydzdt \quad (31)$$

$$\frac{\delta(\rho v_x)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v_y)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho v_z)}{\delta z} + \frac{\delta\rho}{\delta t} = 0 \quad (32)$$

Telle est l'équation de continuité.

L'eau étant un liquide compressible, du moins à de très fortes pressions, cette équation s'y applique pour une nappe peu profonde, on a généralement  $\rho = \text{cste} \approx 1$ , comme  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$  sont les composantes de la vitesse  $\vec{V}$ , nous avons :

$$\rho \left[ \frac{\delta(\rho v_x)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v_y)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho v_z)}{\delta z} \right] = 0 \quad (33)$$

$\nabla \cdot \vec{V} = 0$  si  $\vec{V}$  dérive d'un potentiel c'est-à-dire si nous avons :

$V = -k\nabla H$  Loi de Darcy

$\nabla \cdot \nabla H = \nabla^2 H = 0$  Loi de Laplace

### L'équation d'état

Les équations d'état caractérisent le comportement du milieu et du liquide dans les conditions de filtration. Elles lient la déformation de la couche aux variations de pression de la roche et de l'eau.

Ces conditions se rencontrent dans les nappes captives profondes, où les variations de la viscosité, de la densité et de la compressibilité de l'eau seront fonction de la pression et de la température. Dans leur forme générale les équations d'état de l'eau et du milieu poreux s'expriment de la façon suivante:

$$- \frac{\rho}{\mu} = f(P, t^\circ) \quad \text{pour le liquide et} \quad (34a)$$

$$- n_a = f(P) \quad \text{pour le milieu poreux} \quad (34b)$$

Il faut savoir que le volume des vides de la roche est caractérisé par la porosité active  $n_a$  qui peut subir des variations sous la pression hydrostatique.

Si nous tenons compte des propriétés élastiques du liquide filtrant, la variation du volume due à la variation de la pression suit la loi de Hooke R qui s'écrit :

$$\frac{dV_e}{V_e} = -\beta_e \cdot dP \quad (35)$$

Nous constatons que l'augmentation de la pression entraîne la diminution du volume du liquide et inversement (ce qui est représenté par le signe [-]). La capacité du liquide à changer son volume, sous une unité de pression, est caractérisé par le coefficient de compressibilité  $\beta_e$ . La diminution est l'essence physique de ce coefficient qui se déduit de la formule suivante :

$$\beta_e = -\frac{1}{V_e} \cdot \frac{dV_e}{dP} \quad \text{en 1/atm ou en 1/m (hauteur de la colonne d'eau).} \quad (36)$$

$\frac{1}{\beta_e}$  est appelé module d'élasticité volumique et s'exprime en atmosphère.

Le coefficient d'élasticité volumique des eaux souterraines dépend de la température, de la pression, du degré de leur minéralisation et de leur contenance en gaz. Dans les conditions naturelles à  $2.7 \times 10^{-6}$  1/m pour les eaux très minéralisées à  $5 \times 10^{-6}$  1/m pour les eaux douces. En considérant que

$$V_e = \frac{M_e}{\rho_e} \quad \text{et} \quad d(V_e) = d\left(\frac{M_e}{\rho_e}\right) = -M_e \frac{d\rho_e}{\rho_e^2} \quad (37)$$

Donc

$$\beta_e = -\frac{\rho_e}{M_e} \cdot \frac{-M_e \frac{d\rho_e}{\rho_e^2}}{dP} = \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{d\rho_e}{dP} \quad (38)$$

Cette équation représente l'équation d'état du liquide. Pour l'obtenir nous avons considéré que la variation du volume du liquide  $dV_e$  est liée directement à la variation de la densité du liquide  $d\rho_e$ , vu que la masse  $M_e$  pour des variation de volume reste inchangée (loi de conservation de la masse).

Si nous intégrons l'équation obtenue de  $P_0$  à  $P$  et de  $\rho_e^0$  à  $\rho_e$ , nous aurons

$$\rho_e = \rho_e^0 e^{\beta_e(P-P_0)} \quad (39)$$

-  $\rho_e^0$  densité de l'eau à la pression atmosphérique ( $1 \text{ gr/cm}^3$ ).

La variation du volume de la couche sous l'influence de la pression hydrostatique correspond à la variation du volume des vides.

La pression qui s'exerce sur le squelette de la roche aquifère (c à d sur les grains)  $P_{sq}$  est déterminée par la différence entre la pression de la roche qui correspond aux poids des roches sus-jacentes ( $P_{roche} = h\gamma_{roche}$ ) et la pression hydrostatique de l'eau.

$$\text{Donc } P_{sq} = P_{roche} - P_{aquifère} \quad (\text{Pression hydrostatique de l'aquifère}). \quad (40)$$

Nous voyons bien que si la pression hydrostatique de l'eau diminue, la pression sur le squelette de la roche  $P_{sq}$  augmente, ce qui entraîne forcément la diminution du volume des pores de la roche. La variation du volume des vides d'un milieu poreux élastique suit la loi de Hooke, d'où :

$$\frac{dV_{vides}}{V_r} = -\beta_r \cdot dP_{sq} \quad (41)$$

Le signe “-“ dans cette formule montre que le volume des vides augmente quand la pression sur le squelette de la roche diminue. La capacité de variation du volume des pores de la roche est caractérisée par le coefficient de compressibilité de la roche.

$$\beta_r = -\frac{1}{V_r} \cdot \frac{dV_{vides}}{dP_{sq}} \quad 1/\text{atm ou } 1/\text{m} \quad (41a)$$

$$\text{Nous savons que } dP_{sq} = d(P_{roche} - P_{aquifère})$$

Considérons que  $P_{roche}$  ne varie pas vu que les grains ne subissent pas de variation de volume, nous aurons :

$$dP_{sq} = -dP_{aquifère} \quad \text{ou} \quad \beta_r = -\frac{1}{V_r} \cdot \frac{dV_{vides}}{dP_{aq}} \quad (41b)$$

Cette équation représente l'équation d'état du milieu poreux dans un système captif.

Si nous considérons la variation du volume des vides par rapport à la roche entière  $\frac{dV_{vides}}{dP_{aq}}$ , ceci correspond en définitive à la variation de la porosité  $dn$  :

$$\frac{dV_{vides}}{V_r} = \frac{d(nV_r)}{V_r} = dn \quad (42)$$

Nous pouvons écrire que

$$dn = \beta_{roche} \cdot dP_{aq} \quad (43)$$



## Écoulements stationnaires suivant un plan

### 1) Écoulement dans une nappe captive entre deux rivières (canaux)

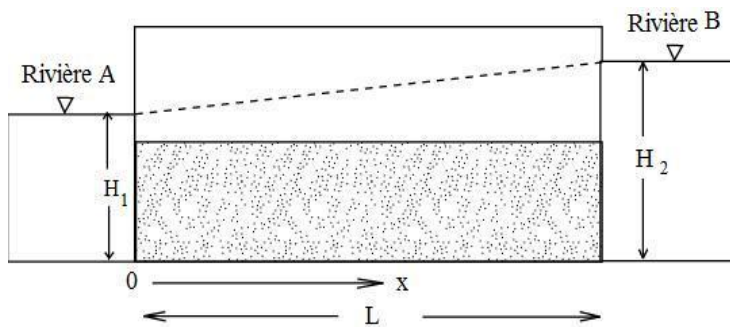


Figure 6: écoulement plan dans une captive limité par deux rivières.

Si la distance entre les deux rivières  $L$  est très inférieure à leurs longueurs dans le plan, les lignes de courant seront parallèles les unes aux autres. Dans ce cas précis nous aurons un écoulement linéaire, dépendant que d'une seule variable (coordonnée)  $x$ , c'est-à-dire  $H = H(x)$ .

L'équation différentielle

tirée de l'équation de Laplace aura cette forme :

$$\frac{d^2H}{dx^2} = 0 \quad (44)$$

Le domaine de filtration se trouve dans l'intervalle  $(0, L)$  et les conditions aux limites seront :  $H(0) = H_1$  et  $H(L) = H_2$  (45)

En utilisant l'équation différentielle et connaissant les conditions aux limites nous pouvons trouver  $H(x)$ .

- Vu que  $\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dH}{dx} \right) = 0$  si nous intégrons une première fois suivant  $x$  nous aurons  $\frac{dH}{dx} = c_1$  d'où  $c_1$  est une constante arbitraire.
- Nous pouvons écrire  $\frac{dH}{dx} = c_1$  sous cette forme  $dH = c_1 dx$ . Si nous intégrons cette équation nous aurons  $\int dH = c_1 \int dx$  ceci nous donne  $H(x) = c_1 x + c_2$
- Pour déterminer  $c_1$  et  $c_2$  nous utiliserons les conditions aux limites.

$$H_1 = c_1 \cdot 0 + c_2 \quad (46a)$$

$$H_2 = c_1 L + c_2 \quad (46b)$$

$$\text{D'où } c_2 = H_1 \text{ et } c_1 = \frac{H_2 - H_1}{L}$$

Connaissant les valeurs de  $c_1$  et  $c_2$  nous pouvons écrire l'équation de  $H(x)$ .

$$H(x) = \frac{H_2 - H_1}{L} x + H_1 \quad (47)$$

Cette équation représente la droite piézométrique entre les deux rivières avec une pente correspondant au gradient hydraulique  $\frac{H_1 - H_2}{L}$ .

- 2) Écoulement dans une nappe libre entre deux rivières (canaux) avec une infiltration efficace  $W$ .

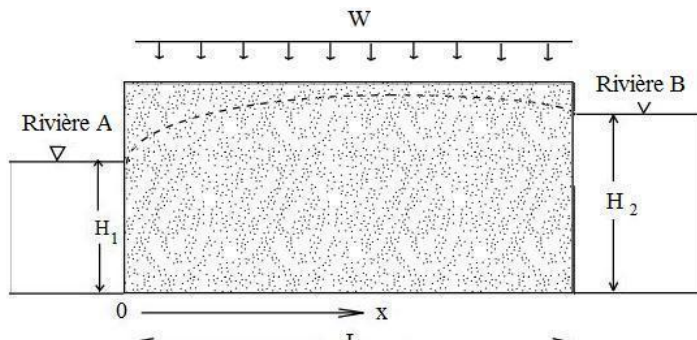


Figure 7: écoulement plan dans une nappe libre limitée par deux rivières.

L'équation différentielle qui régit cet écoulement s'appelle l'équation de Boussinesq et s'écrit de la façon suivante:

$$\frac{d}{dx} \left( kh \frac{dh}{dx} \right) + W = 0 \quad (48)$$

qui peut s'écrire aussi

$$\frac{d}{dx} \left( h \frac{dh}{dx} \right) + \frac{W}{k} = 0 \quad (49)$$

Les conditions aux limites s'expriment comme précédemment

$$H(0) = H_1 \quad \text{et} \quad H(L) = H_2 \quad (50)$$

Il est demandé de trouver l'équation de la courbe piézométrique  $H(x)$

- L'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$d \left( h \frac{dh}{dx} \right) = - \frac{W}{k} dx \quad (51)$$

- Nous intégrons une première fois

$$h \frac{dh}{dx} = - \frac{W}{k} x + c_1 \quad (52)$$

- nous pouvons écrire

$$h dh = - \frac{W}{k} x dx + c_1 dx \quad (53)$$

- si nous intégrons une deuxième fois nous aurons

$$\frac{1}{2} h^2 = - \frac{W}{k} \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad (54)$$

- en utilisant les conditions aux limites (50), nous obtenons :

$$c_2 = \frac{h_1^2}{2} \quad \text{et} \quad c_1 = \frac{W L}{k} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{2L} \quad (55)$$

- l'équation recherchée devient :

$$h^2(x) = - \frac{W}{k} x^2 + \left( \frac{h_2^2 - h_1^2}{L} + \frac{WL}{k} \right) x + h_1^2 \quad (56)$$

La courbe piézométrique correspond à une parabole

Pour trouver le débit unitaire nous posons

$$q(x) = kh \frac{dh}{dx} = \frac{k}{2} \frac{d(h^2)}{dx} = \frac{k}{2} \left( - \frac{2W}{k} x + \frac{h_2^2 - h_1^2}{L} + \frac{WL}{k} \right) \quad (57)$$

$$q(x) = k \frac{h_2^2 - h_1^2}{2L} + W \left( \frac{L}{2} - x \right) \quad (58)$$

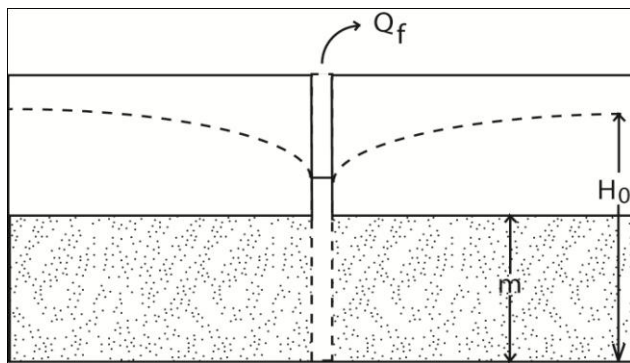
Nous constatons que le débit maximum s'obtient pour  $x=0$

Pour  $W=0$  La formule devient :

$$q(x) = k \frac{h_2^2 - h_1^2}{2L} \quad (59)$$

Cette dernière formule correspond à la formule de Dupuits. Le débit unitaire ne varie pas dans le sens de l'écoulement.

### 3) L'écoulement radial en régime permanent



L'écoulement radial s'observe généralement au niveau des forages et des puits. L'eau provenant de la nappe arrive au forage de tous les sens. Les trajectoires ont une forme radiale. L'écoulement dans ce cas dépend d'une coordonnée  $r$ .

Figure 8: écoulement radial dans une nappe captive sous l'effet d'un pompage.

L'équation différentielle régissant un écoulement radial s'écrit de la façon suivante:

$$\nabla^2 H = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) = 0 \quad (60) \quad \text{pour un écoulement stationnaire}$$

$$\text{D'où } \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) = 0 \quad \text{ainsi } H=H(r)$$

Les conditions aux limites s'écrivent ainsi :

$$H(R)=H_0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=r_f} = \frac{Q_f}{2\pi r_f T} \quad (61)$$

Avec  $r_f$  – rayon du forage et  $Q_f$  – débit du forage.

- Si nous intégrons nous aurons :

$$r \frac{dh}{dr} = c_1 \quad \text{ce qui donne } dh = c_1 \frac{dr}{r} \quad (62)$$

Si nous intégrons une deuxième fois nous aurons :

$$H(r)=c_1 \ln r + c_2 \quad (63)$$

En utilisant les conditions aux limites nous aurons :

$$H_0 = c_1 \ln R + c_2 \quad (64)$$

$$\text{comme } c_1 \frac{1}{r_f} = \frac{Q_f}{2\pi r_f T} \quad \text{Donc } c_1 = \frac{Q_f}{2\pi T} \quad \text{et } c_2 = H_0 - \frac{Q_f}{2\pi T} \ln R \quad (65)$$

Si nous posons  $c_1$  et  $c_2$  dans l'équation ceci donne

$$H_r = \frac{Q_f}{2\pi T} \ln \frac{r}{R} + H_0 \quad (66)$$

Au niveau du forage l'équation devient :

$$H_f = \frac{Q_f}{2\pi T} \ln \frac{r_f}{R} + H_0 \quad (67)$$

Dans ce cas nous considérons que le débit est constant et si  $H_f$  est maintenue constante nous aurons :

$$Q_f = \frac{2\pi T(H_0 - H_f)}{\ln \frac{R}{r_f}} = \frac{2\pi T s_f}{\ln \frac{R}{r_f}} \quad (68)$$

Où  $s_f = H_0 - H_f$  -rabattement dans le forage

Pour une nappe libre l'équation devient

$$Q_f = \frac{\pi k (h_0^2 - h_f^2)}{\ln \frac{R}{r_f}} \quad (69)$$

#### 4) Ecoulement radial en régime transitoire

La principale résolution de l'écoulement radial en régime transitoire s'effectue dans les conditions d'un pompage dans un forage à débit constant ( $Q_f = \text{cst}$ ) à partir d'un temps  $t=0$  dans une nappe captive illimitée.

L'équation qui régit l'écoulement radial en régime transitoire s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} = \frac{S}{T} \frac{dH}{dt} \quad (70)$$

L'intégration de cette équation différentielle pour les conditions aux limites telles que

$$H = H_0 = \text{cste} \quad \text{et} \quad \left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=r_f} = \frac{Q_f}{2\pi r_f T} \quad (71)$$

a été obtenue par Theis C.V. et devient

$$H_0 - H = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (72)$$

avec  $u = \frac{r^2}{4at}$  sachant que  $a = \frac{T}{S}$  en  $\text{m}^2/\text{s}$

La fonction  $W(u)$  « Well Function » peut être écrite de la façon suivante :

$$W(u) = -E_i(-u) = \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (73)$$

$E_i$  – est appelée fonction exponentielle intégrale et peut être mise en série comme suit :

$$\int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln \frac{1}{u} - 0.577 + u - \frac{u^2}{2.2!} + \dots \quad (74)$$

La fonction  $W(u)$  est tabulée.

Lors d'un écoulement radial en régime transitoire au début du pompage le niveau d'eau dans le forage, la vitesse de filtration et le débit du courant changent d'une façon très remarquable. Ceci est dû au fait que la zone d'influence du pompage est située au voisinage du forage et est très limitée.

Avec le temps la zone d'influence s'agrandit et le niveau d'eau commence à se stabiliser. Nous atteignons ainsi un deuxième stade de l'écoulement des eaux souterraines qui reste toujours transitoire mais dont le rythme s'apparente à celui du régime permanent. Le cône de dépression continu de descendre et à s'élargir dans le temps. L'écoulement à ce stade porte le qualificatif de quasi-stationnaire.

L'évaluation quantitative des conditions d'écoulement à ce stade peuvent être effectuée sur la base d'une résolution approximative de l'équation de l'écoulement transitoire. Ceci se traduit par le fait que la fonction intégrale exponentielle peut être exprimée dans la forme d'une série alternée.

$$-E_i(-u) = \ln \frac{1}{u} - 0.5772 + u - \frac{u^2}{2.2!} + \frac{u^3}{3.3!} - \frac{u^4}{4.4!} + \dots \quad (75)$$

Avec le temps l'argument  $u = \frac{r^2}{4at}$  devient très petit et les termes en  $u$  deviennent négligeables par rapport au deux premiers, ce qui donne pour la fonction  $-E_i(-u) =$  l'approximation suivante :

$$-E_i\left(-\frac{r^2}{4at}\right) = \ln \frac{4at}{r^2} - 0.5772 = \ln \frac{2.25at}{r^2} \quad (76)$$

En tenant compte de cette approximation la formule  $s = \frac{Q}{4\pi T} W(u)$  devient :

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2.25at}{r^2} = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{2.25at}{r^2} \quad (77)$$

### Détermination des paramètres hydrogéologiques par les méthodes d'interprétation des données d'essai de pompage.

L'essai par pompage se caractérise par une expérimentation qui consiste en un pompage à débit constant et à observer le comportement hydrodynamique de la nappe aquifère en relevant le niveau d'eau en fonction du temps, ou en fonction de la distance ou combiné en fonction du temps et de la distance dans un puits ou dans un forage.

L'objectif de la réalisation d'un essai par pompage est de :

- déterminer les paramètres hydrogéologiques de l'aquifère;
- déterminer les caractéristique de l'aquifère et de l'ouvrage de captage afin de définir l'équipement techniques du forage;
- étudier l'évolution des rabattements en fonction des débits pompés et évaluer les ressources exploitables.

Dans le cas de la détermination des paramètres hydrodynamiques, pour traiter les données de l'essai par pompage nous utilisons la formule de Theis vue précédemment.

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \text{ avec } u = \frac{r^2}{4at} \quad (78)$$

et sa courbe étalon en mettant l'équation de Theis et l'argument  $u$  sous le logarithme, nous aurons :

$$\lg s = \lg \frac{Q}{4\pi T} + \lg W(u) \text{ et } \lg \frac{1}{u} = \lg t + \lg \frac{4a}{r^2} \quad (79a)$$

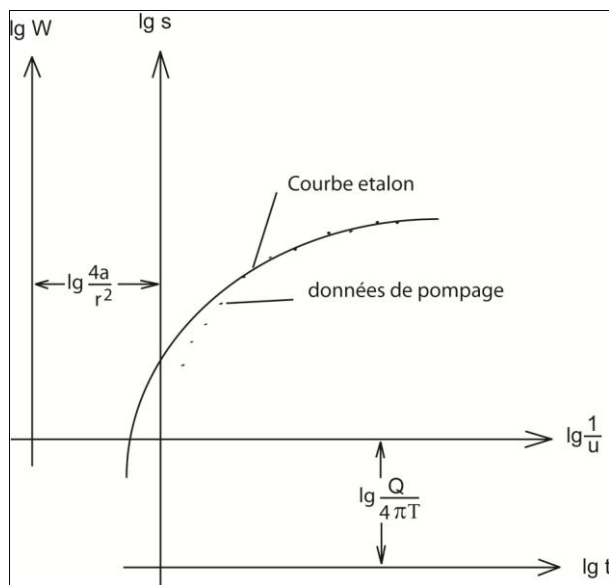


Figure 9: Interprétation graphique des données de pompage sur la courbe étalon de Theis C.V.

La courbe étalon se trace graphiquement et aura pour ordonnée  $\lg W(u)$  et en abscisse  $\lg \frac{1}{u}$ .

Les données rabattement/temps vont être reportées sur un graphe  $\lg s = f(\lg t)$  et nous essayons de caler le maximum de points sur la courbe étalon de telle façon que les axes des ordonnées et des abscisses des graphes restent parallèles les uns aux autres.

Lorsque le calage est atteint nous prenons les coordonnées de n'importe quel point pris sur la courbe et nous utilisons les expressions suivantes:

$$\lg \frac{Q}{4\pi T} = \lg s - \lg W(u) \text{ et } \lg \frac{4a}{r^2} = \lg \frac{1}{u} - \lg t \quad (79b)$$

Pour des valeurs très petites de  $u$  ( $u < 0.01$ ) seuls les deux premiers de la série

$$-E_i(-u) = w(u) = \ln \frac{1}{u} - 0.5772 = \ln \frac{1}{u} - \ln 1.78 = \ln \frac{0.5618}{u} = \ln \frac{2.2472at}{r^2} \cong \ln \frac{2.25at}{r^2}$$

En logarithme décimal l'équation devient :

$$s = \frac{2.3Q}{4\pi T} \lg \frac{2.25Tt}{r^2 S} \quad (80)$$

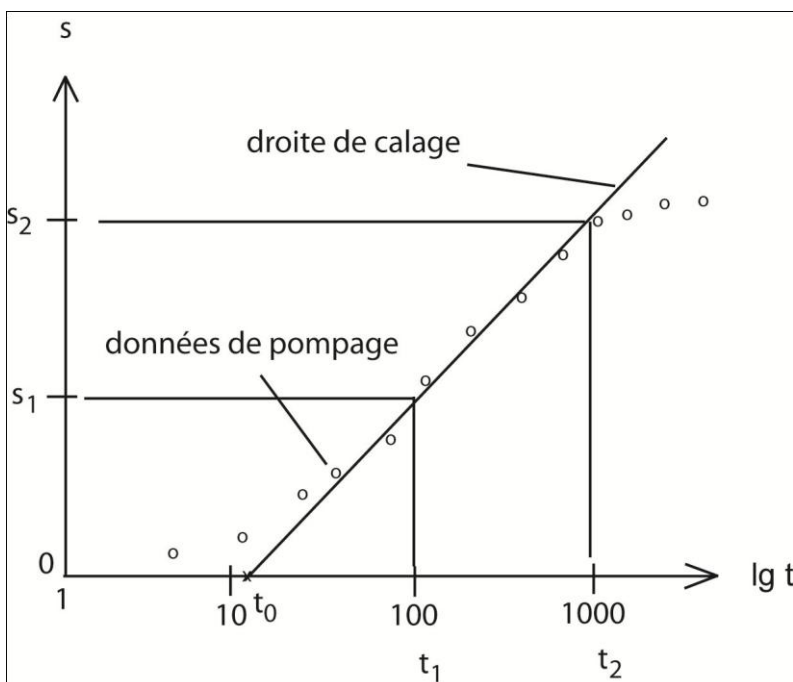
Cette équation a été déduite par Jacob et peut être appliquée selon plusieurs dispositifs de pompage :

- 1) aux observations piézométriques dans un forage à différents intervalles de temps ;
- 2) aux observations piézométriques simultanées à un moment donné dans plusieurs piézomètres et forages;
- 3) aux observations piézométriques dans différents forages et piézométriques et à différents moments.

Dans le premier cas c'est-à-dire l'observation du niveau piézométrique à différents intervalles de temps l'équation précédente devient :

$$s = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{2.25T}{r^2 S} + \frac{0.183Q}{T} \lg t \quad (81)$$

Cette équation correspond à l'équation d'une droite que nous pourrions représenter sous forme de graphe  $s=f(\lg t)$  sur du papier semi-logarithmique. La pente de la droite est définie par  $\frac{0.183Q}{T}$ . La valeur de la pente est déterminée par la projection d'un segment de droite sur l'axe des abscisses (prendre un cycle logarithmique) et sur l'axe des ordonnées  $-s$



$$C = \frac{s_2 - s_1}{\lg t_2 - \lg t_1} \quad (81a)$$

sachant qu'un cycle logarithmique donne  $t_2 = 10t_1$  et que  $\lg t_2 - \lg t_1$  est égale à 1 donc :

$$C = \frac{\Delta s_{2-1}}{1} = \frac{0.183Q}{T} \text{ alors}$$

$$T = \frac{0.183Q}{C} \quad (81b)$$

Figure 10: Interprétation graphique des données de pompage  $s = f(t)$  en régime de pseudo-équilibre selon Jacob C.E.

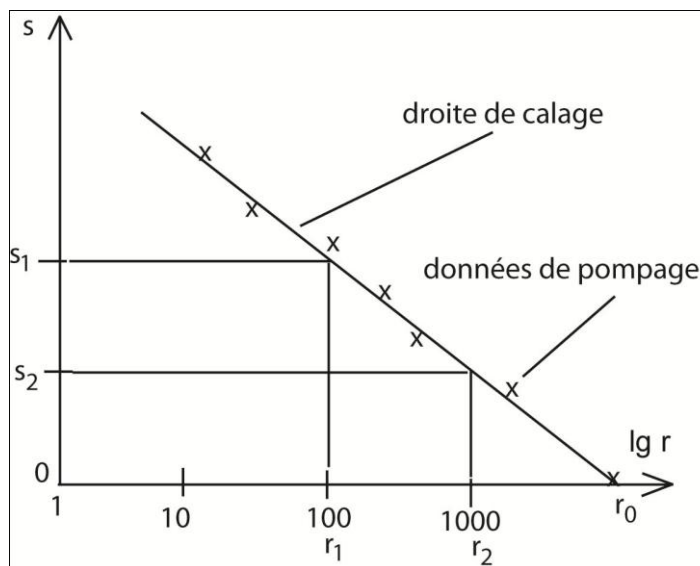
En calculant la valeur de la transmissivité  $T$  et en déterminant graphiquement la valeur de  $t_0$  qui correspond à l'intersection de l'axe des abscisses (origine des rabattements  $s=0$ ) avec le prolongement de la droite  $s=f(\lg t)$ , nous déterminons la valeur de  $S$  avec l'expression suivante :

$$s = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{2.25Tt_0}{r^2S} = 0 \quad (82)$$

ceci est possible pour  $\frac{2.25Tt_0}{r^2S} = 1$  ainsi  $S = \frac{2.25Tt_0}{r^2}$

Pour le deuxième dispositif les observations se font simultanément dans plusieurs forages à un instant  $t$  donné. La variable dans ce cas sera uniquement  $r$  et l'équation devient :

$$s = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{2.25T}{r^2S} - \frac{0.366Q}{T} \lg r \quad (83)$$



Comme pour le premier dispositif l'équation représente une droite sur une échelle semi-logarithmique. La pente de la droite sera égale à  $C = \frac{0.366Q}{T}$

donc

$$C = \frac{s_1 - s_2}{\lg r_2 - \lg r_1} = \frac{0.366Q}{T} \quad (83a)$$

Figure 11: Interprétation graphique des données de pompage  $s=f(r)$  en régime de pseudo-équilibre selon Jacob C.E.

Etant donné que  $T$  est connu nous pouvons déterminer la valeur de  $S$  en considérant  $s=0$  à  $r_0$ .

$$s = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{2.25Tt}{r_0^2S} = 0 \text{ pour } \frac{2.25Tt}{r_0^2S} = 1 \quad (83b)$$

$r_0$  étant déterminé graphiquement, nous pouvons calculer  $S$

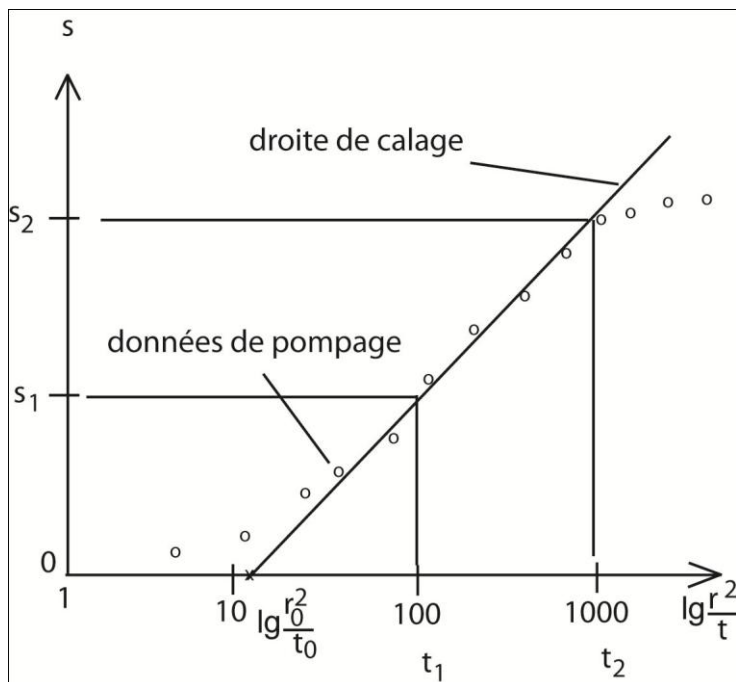
$$S = \frac{2.25Tt}{r_0^2} \quad (83c)$$

Le dispositif concernant les observations piézométriques dans différents forages et piézomètres et à différents moments est une approche combinée des deux méthodes



précédentes en traçant un graphe  $s - \lg \frac{t}{r_0^2}$  ainsi l'équation de Jacob s'écrit de la façon suivante :

$$s = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{2.25T}{r_0^2 S} + \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{t}{r^2} \quad (84)$$



Le graphe sur une échelle logarithmique aura la forme d'une droite. La pente sera calculée comme précédemment soit :

$$C = \frac{s_2 - s_1}{\lg \frac{r_2^2}{t_2} - \lg \frac{r_1^2}{t_1}} = \frac{0.183Q}{T} \quad (84a)$$

Il faut choisir le segment à avoir  $\frac{r_2^2}{t_2} = 10 \frac{r_1^2}{t_1}$ , d'où nous tirons la transmissivité

$$T = \frac{0.183Q}{C} \quad (84b)$$

Figure 12: Interprétation graphique des données de pompage  $s = f\left(\lg \frac{r^2}{t}\right)$  en régime de pseudo-équilibre selon Jacob C.E.

Le coefficient d'emmagasinement  $S$  est calculé comme pour les autres cas en posant  $s=0$ , ce qui revient à poser  $\lg \frac{2.25Tt_0}{r_0^2 S} = 0$  ce qui entraîne  $\frac{2.25Tt_0}{r_0^2 S} = 1$  ce qui donne pour  $S$  :

$$S = \frac{2.25Tt_0}{r_0^2} \quad (84c)$$

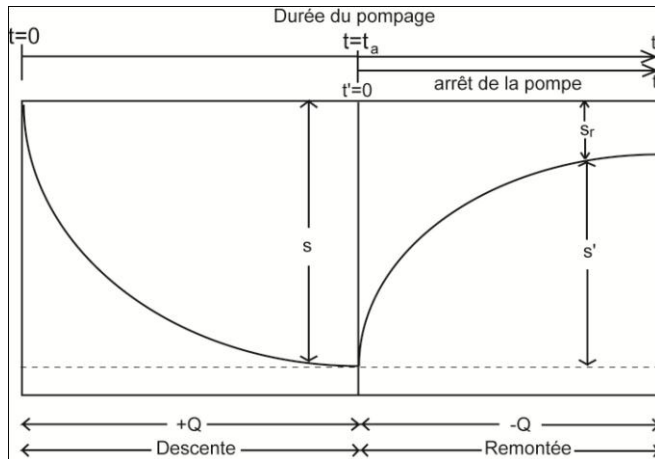
### Méthode de l'analyse de la courbe de remontée pour la détermination des paramètres hydrogéologiques.

Les paramètres hydrogéologiques peuvent être déterminés à l'aide de l'équation de l'écoulement transitoire en analysant la remontée du niveau piézométrique après l'arrêt de la pompe.

À l'arrêt du pompage, l'eau de la nappe continue de s'écouler dans le puits dont le niveau dynamique remonte et le cône de dépression commence à se réduire progressivement dans la nappe aquifère, ce qui se traduit par réduction du rabattement dans les piézomètres.

L'analyse mathématique du phénomène physique de la remontée de la nappe peut être réalisée par l'application du principe de superposition des écoulements.

Supposant qu'un débit +Q soit pompé dans le puits jusqu'à un instant  $t_a$  où le pompage s'arrête. Nous pouvons imaginer que l'ouvrage continue à libérer le même débit, mais que cette quantité d'eau au lieu d'être expulsée est reversée simultanément dans le puits. Le comportement de la nappe est alors le même que si l'on continuait de pomper sous le même débit en injectant un débit identique -Q où l'écoulement se superposerait simultanément à celui du pompage.



Soit  $t$  le temps écoulé depuis le début du pompage et  $t'$  le temps écoulé depuis l'arrêt de la pompe. Pour la descente nous aurons :

$$s = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{2.25Tt}{r^2S} \quad (85a)$$

Et pour la remontée:

$$s' = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{2.25Tt'}{r^2S} \quad (85b)$$

Figure 13: Interprétation graphique des données de pompage lors de la remontée  $s=f(t/t')$  en régime de pseudo-équilibre selon Jacob C.E.

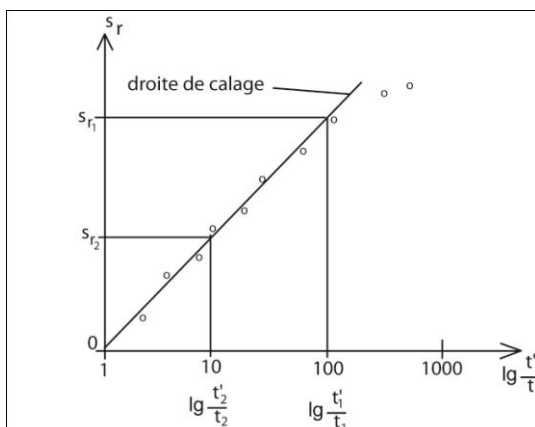
Le rabattement restant ou résiduel peut être obtenu mathématiquement par la soustraction des deux rabattements de la descente et de la remontée, soit :

$$s_r = s - s' = \frac{0.183Q}{T} \left( \lg \frac{2.25Tt}{r^2S} - \lg \frac{2.25Tt'}{r^2S} \right) \quad (86)$$

Après simplification nous obtenons

$$s_r = s - s' = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{t}{t'} \quad (86a)$$

L'étude de la courbe montre que la remontée du niveau est rapide, puis elle décroît pour devenir asymptotique au niveau piézométrique primitif. C'est cette dernière partie de la



courbe qui est la plus intéressante car elle renseigne sur les réserves et la réalimentation de la nappe.

Figure 14: Droite représentative des données de pompage lors de la remontée  $s=f(t/t')$ .

Les données de pompage sont portées sur un diagramme semi-log avec en abscisse les  $\lg \frac{t}{t'}$  et en ordonnée les valeurs du rabattement résiduel.

$$C = \frac{s_{r1} - s_{r2}}{\lg \frac{t_1}{t_2} - \lg \frac{t_2}{t_1}} = \frac{0.183Q}{T} \quad (86b) \quad \text{d'où} \quad T = \frac{0.183Q}{C} \quad (86c)$$

### Essai de puits par paliers de débit de courte durée (Castany, 1982)

Le but de cet essai est d'évaluer les caractéristiques du complexe aquifère/ouvrage de captage. Il permet d'établir le programme d'équipement technique de l'ouvrage : tubage, crépine, massif filtrant et puissance de la pompe, etc.

Comme pour tous les essais que nous avons vus précédemment les conditions suivantes doivent être satisfaites :

- Validité de la loi de Darcy : écoulement laminaire et milieu isotrope et homogène ;
- Puits complet, c'est à dire captant toute l'épaisseur de l'aquifère ;
- Puits correctement développé et équipé ;
- Surface piézométrique subhorizontale ;
- Débit constant ;
- Rayon du puits le petit possible.

Les pompages se font par paliers de débit, à débit constant pendant 1 à 3h. Nous mesurons le rabattement en fin de palier et débit en  $\text{m}^3/\text{h}$ . Chaque palier est suivi d'une période d'arrêt de la pompe d'une durée égale de pompage, permettant ainsi une remontée du niveau. Les débits ensuite croissent selon une progression de 2, 3 et 4. Pour les nappes captives un nombre de paliers de 3 peut être suffisant par contre pour une nappe libre il doit être supérieur 5 ou 6.

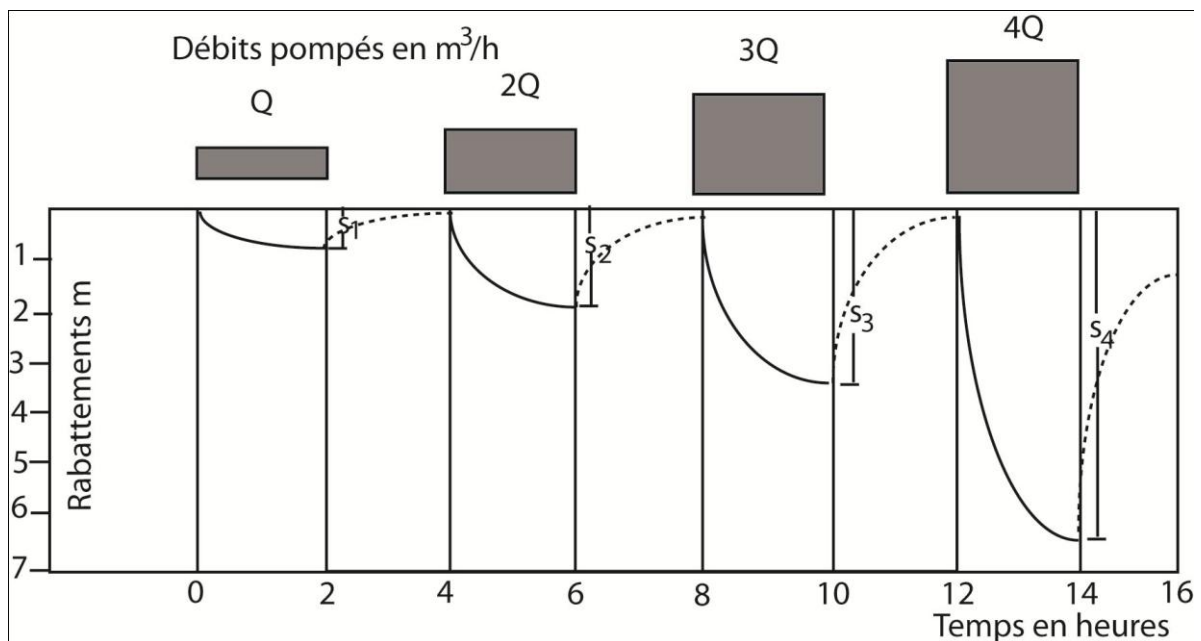


Figure 15 : Essai de puits par paliers de débit de courte durée dans un sondage captant un aquifère à nappe libre de la Craie (D'après Forkasiewicz, 1978).

Tableau 2 : Données de pompage par paliers

Paliers de débit	Débits pompés	Rabattelements	Débits spécifiques	Rabattelements spécifiques
1	42	0.81	51.85	0.0156
2	87	2.01	45	0.0231
3	132	3.53	37.4	0.0268
4	178	6.47	27.5	0.0364

Le rabattement mesuré dans l'ouvrage à un instant t correspond à la somme de deux composantes, appelées pertes de charge, exprimées en mètres de hauteur d'eau :

- Une perte de charge linéaire provoquée par l'écoulement laminaire dans l'aquifère au voisinage du forage, notée BQ; Elle est imposée par les paramètres hydrodynamiques de l'aquifère. Elle est influencée également par la partie captante du forage: remaniement du réservoir, crépine et massif filtrant. Cette influence serait négative en cas de colmatage du forage. Cette perte de charge est une constante, dépendant uniquement des caractéristiques techniques de l'équipement du forage.

- Une perte de charge quadratique, non linéaire, provoquée par l'écoulement turbulent dans le forage. Elle est caractéristique de l'équipement technique du forage, diamètre du tubage et de la crépine, notée CQ<sup>2</sup>.

Le rabattement total s à l'instant t est donné par l'expression de Jacob C.E. (1946) :

$$s = BQ + CQ^2 \quad (87)$$

Quand les débits sont faibles, impliquant des vitesses faibles alors les pertes de charge dans le tubage et dans les crépines deviennent négligeables, ce qui simplifie l'équation :

$$s = BQ \quad (88)$$

Lorsque la vitesse effective au voisinage du forage dépasse la vitesse critique l'équation devient :

$$s = CQ^2 \quad (89)$$

### Interprétation graphique des données de l'essai de puits

Le couple de données de chaque palier de débit, débit constant en m<sup>3</sup>/h et rabattement résiduel en m, est porté sur un papier graphique. A partir des points obtenus nous traçons la courbe débits/rabattelements ou courbe caractéristique, représentant la fonction s=f(q). Une courbe concave traduit un essai non valable (mesures incorrectes ou développement au cours du pompage).

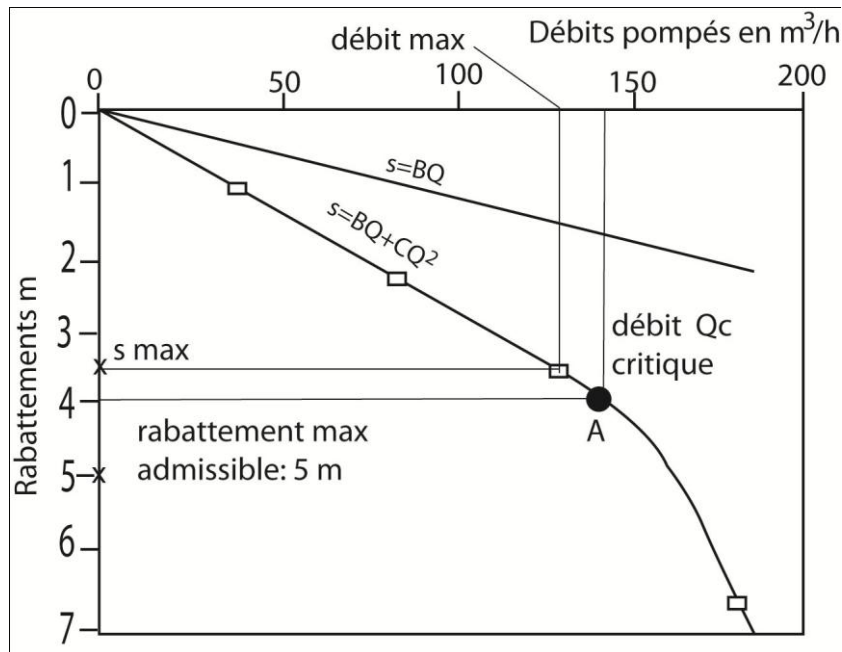


Figure 16 : Graphe des rabattements en fonction des débits.

Le débit critique  $Q_c = 140 \text{ m}^3/\text{h}$  est calculé par l'abscisse du point A déterminé par l'augmentation de la pente. Calcul du débit maximum d'exploitation,  $Q_{\max} = 130 \text{ m}^3/\text{h}$ , correspond à un rabattement maximum,  $S_{\max}$ , en fonction du débit critique et du rabattement maximum admissible 5 m.

Le débit spécifique d'un forage noté  $q_s$  est le débit pompé rapporté au rabattement  $s$  dans le forage

$$q_s = \frac{Q}{s} = \frac{42}{0.81} = 51.85 \text{ m}^3/\text{h} \quad (90)$$

Le rabattement spécifique  $s/Q$  est la hauteur de rabattement mesurée dans le forage rapportée au débit pompé. Il est exprimé en  $\text{m}/\text{m}^3/\text{h}$

$$\frac{s}{Q} = \frac{0.81}{42} = 0.015 \text{ m}/\text{m}^3/\text{h} \quad (91)$$

L'équation de Jacob devient :

$$\frac{s}{Q} = B + CQ \quad (92)$$

C'est l'équation d'une droite où 4 cas peuvent se présenter

- Droite passant par l'origine indiquant que le régime turbulent est prédominant dans l'aquifère ( $s=CQ^2$ ) ;
- Droite ne passant pas par l'origine ( $s=BQ+CQ^2$ ) ;

- Droite à pente nulle verticale à l'axe des ordonnées traduisant un écoulement laminaire, perte de charge dans la crépine et le tubage nulles ou négligeable ( $s=BQ$ );
- Courbe concave vers le haut  $s=BQ+CQ^n$  avec  $n > 2$ .

### Calcul des pertes de charge

La droite débits/rabattements spécifiques permet de déterminer les coefficients B et C de l'équation de Jacob  $s/Q=B+CQ$

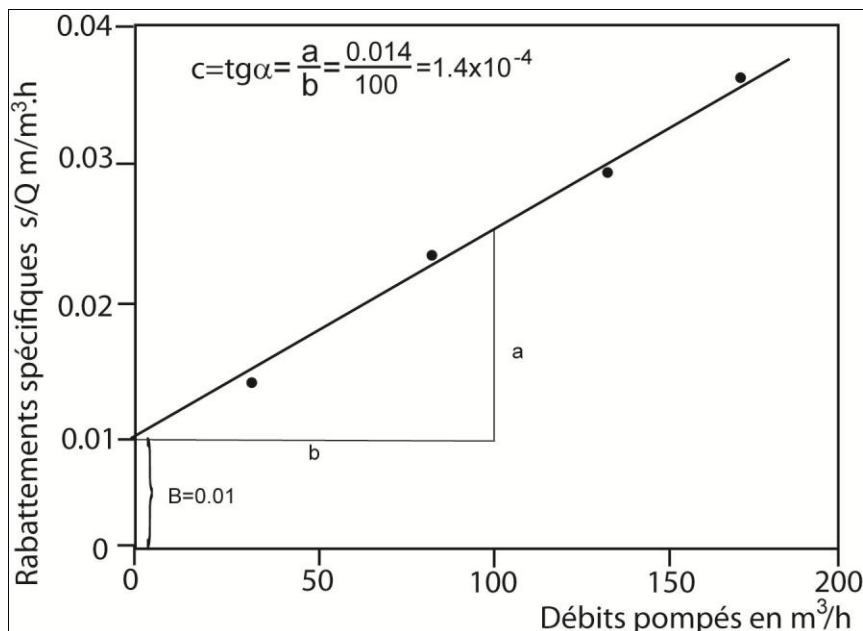
- Le coefficient B est obtenu par l'intersection de la droite représentative avec l'axe des rabattements spécifiques. Dans l'exemple  $B=0.01$
- Le coefficient C est égal à la pente de la droite représentative :

$$C = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{0.014}{100} = 1.4 \times 10^{-4} \quad (93)$$

L'équation de la droite représentative est :

$$s = 1.10^{-2}Q + 1,4.10^{-4}Q^2 \quad (94)$$

Pour voir si l'essai est correct, nous calculons le rabattement correspondant un chaque palier de débit par cette expression et nous reportons les points sur le graphe, qui devraient se superposés sur la courbe.



Il est important de signaler que pour un débit de  $100 \text{ m}^3/\text{h}$  les pertes de charge linéaire  $BQ$  est de  $1 \text{ m}$ , et quadratique  $CQ^2$  est de  $1.5 \text{ m}$  selon l'exemple.

Figure 17 : droite représentative  $s/Q = f(Q)$ .

**Références bibliographiques**

Bear J. (1979) *Hydraulics of groundwater*. Mc Graw Hill. New York. 569p.

Borevski B.V., Samsonov B.G. & Iazvin L.S. (1979) *Méthodes de détermination des paramètres des horizons aquifères par essais de pompage*. Nedra. Moscou. 326p. (en russe).

Castany G. (1982) *Principes et méthodes de l'hydrogéologie*. Dunod Bordas Paris. 238p

Gavitch I.K. (1988) *Hydrogeodynamique*. Nedra.Moscou. 348p. (en russe).

Klimentov P.P. & Kononov B.M. (1985) *Dynamique des eaux souterraines*. Nedra. Moscou. 357p (en russe).

Kruseman G.P. & De Ridder N.A. (1973) *Analysis and evaluation of pumping test data* ILRI Wageningen (traduit en français par Meilhac A. Bulletin11). 213p.

Marsily de G. (1981) *Hydrogéologie quantitative*. Masson Paris. 211p

Mironenko V.A. (1983) *Dynamique des eaux souterraines*. Nedra. Moscou. 357p (en russe).

Schestakov V.M. (1979) *Dynamique des eaux souterraines*. Université de Moscou. 368p. (en russe).