UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2015 – 2016
L2 Économie — Cours de B. Desgraupes

Méthodes Statistiques

Corrigé de l'exercice 56

On a noté à 200 reprises le nombre N de particules β émises par un échantillon de potassium radioactif pendant une durée d'une minute. On a obtenu les résultats suivants :

Nombre de particules	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'observations	8	36	45	50	30	25	6

On fait l'hypothèse que N suit une loi de Poisson de paramètre inconnu λ. On rappelle que pour une loi de Poisson, on a

$$P(N = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

56-1) Donner une estimation de λ.

Le cours de probabilités nous apprend que l'espérance d'une variable N qui suit une loi de Poisson de paramètre λ est $E(N) = \lambda$.

Comme on sait que la moyenne empirique est un estimateur de l'espérance, on va l'utiliser pour estimer le paramètre λ. On calcule la moyenne du nombre de particules pondéré par les effectifs observés :

$$\bar{N} = \frac{1}{200}(0 \times 8 + 1 \times 36 + 2 \times 45 + 3 \times 50 + 4 \times 30 + 5 \times 25 + 6 \times 6) = 2.785$$

56-2) Au moyen d'un test du χ^2, vérifier si l'hypothèse d'ajustement à une loi de Poisson est acceptable au seuil $\alpha = 5\%$?

Calculons les probabilités théoriques $P(N = k)$ pour k variant de 0 à 6 et les effectifs théoriques correspondants en multipliant la probabilité par 200 :

Nombre de particules	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0.062	0.172	0.239	0.222	0.155	0.086	0.064
Effectif théorique	12.40	34.40	47.80	44.40	31.00	17.20	12.80

Remarque : la probabilité pour $k = 6$ est en fait $P(N \geq 6)$ pour assurer que la somme totale vaut 1.

On fait l'hypothèse nulle qu'il y a adéquation de la distribution observée avec la distribution théorique de Poisson de paramètre 2.785.

La statistique du test du χ^2 est

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - C_i)^2}{C_i}.$$

où les O_i sont les valeurs observées et les C_i sont les valeurs calculées (ou valeurs théoriques).

On sait que, sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire Y suit une loi du χ^2 à $\nu = n - 1 = 6$ degrés de liberté. On calcule la valeur de Y comme ceci :

Nombre de particules	0	1	2	3	4	5	6
O_i	8	36	45	50	30	25	6
C_i	12.4	34.4	47.8	44.4	31.0	17.2	12.8
$(O_i - C_i)^2$	19.36	2.56	7.84	31.36	1.00	60.84	46.24
$\dfrac{(O_i - C_i)^2}{C_i}$	1.56	0.07	0.16	0.71	0.03	3.54	3.61

En sommant la dernière ligne, on trouve $Y = 9.688$.

On cherche dans la table de la loi du χ^2, le quantile u_c pour la probabilité $1 - \alpha = 95\%$ à 6 degrés de liberté. On trouve $u_c = 12.592$.

Comme $Y < u_c$, on accepte l'hypothèse H_0.