UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2015 – 2016
L2 Économie — Cours de B. Desgraupes

Méthodes Statistiques

Corrigé de l'exercice 49

Dans une coopérative agricole, on désire tester l'effet d'un engrais sur la production de blé. Pour cela, on choisit au hasard 20 parcelles de terrain de même superficie. La moitié de ces parcelles est traitée avec l'engrais, et l'autre ne l'est pas. Pour les 10 parcelles non traitées, on observe $\sum x_i = 6.16$ et $\sum x_i^2 = 29.22$ où x_i représente la production en tonnes de la i-ème parcelle. Pour les 10 parcelles traitées, on observe $\sum y_j = 6.68$ et $\sum y_j^2 = 34.35$ où y_j représente la production en tonnes de la j-ème parcelle. Les productions en tonnes des parcelles traitées et non traitées sont supposées être distribuées selon une loi normale de même variance.

Au risque 10%, peut-on conclure que l'engrais a un effet sur la production d'une parcelle ?

On fait l'hypothèse H_0 suivante :

$H_0 : m_1 = m_2$

La question posée nous conduit à faire un test unilatéral, autrement dit à considérer l'hypothèse H_1 suivante :

$H_1 : m_1 < m_2$

Commençons par calculer les moyennes empiriques à partir des sommes données :

$$\bar{x_1} = \frac{6.16}{10} = 0.616$$

$$\bar{x_2} = \frac{6.68}{10} = 0.668$$

On calcule ensuite les variances empiriques modifiées :

$$s_1^2 = \frac{1}{10-1}29.22 - \frac{10}{10-1}\bar{x_1}^2 = 2.825$$

$$s_2^2 = \frac{1}{10-1}34.35 - \frac{10}{10-1}\bar{x_2}^2 = 3.321$$

On a supposé que la loi de probabilité a même variance dans les deux populations. En reprenant la notation du cours, on utilise l'estimateur suivant pour cette variance commune :

$$s_{ind}^2 = \frac{(n_1-1)\,s_1^2 + (n_2-1)\,s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

On calcule ici :

$$s_{ind}^2 = \frac{(10-1)\,2.825 + (10-1)\,3.321}{10+10-2} = 3.073$$

d'où on tire $s_{ind} = 1.753$.

Il s'agit d'un test de comparaison de moyennes pour deux petits échantillons. La statistique du test est :

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{ind} \times \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

On sait que, sous l'hypothèse H_0, la variable T suit une loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté.

Calculons la valeur de la statistique :

$$t = \frac{0.616 - 0.668}{1.753 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -0.066$$

Le quantile pour la loi de Student à $n_1 + n_2 - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$ degrés de liberté au seuil 10% vaut -1.3304.

Puisque -0.066 > -1.3304, on accepte l'hypothèse H_0. Autrement dit, au vu des échantillons, on ne peut pas conclure qu'il y ait une différence significative résultant du programme de formation.