Université Badji Mokhtar, Annaba

Faculté des sciences, Tronc commun SNV

$2^{\text{ème}}$ année

2019/2020

Série de TD n: 03. (Lois usuelles)

Part I
Lois usuelles discrètes

Exercise 1 *On sait par expérience qu'une certaine opération chirurgicale a* 85% *de chances de réussir. On s'apprête à réaliser l'opération sur* 20 *patients. Soit* X *la variable égale au nombre de réussites de l'opération sur les* 20 *tentatives.*

1. *Quel modèle proposez-vous pour la variable* X*? (préciser la loi de probabilité de* X*).*
2. *Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de* X*.*
3. *Calculer la probabilité d'avoir au moins* 15 *réussites.*

Exercise 2 *Un magasin spécialisé reçoit en moyenne* 4 *clients par jour, le nombre de clients étant distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité que le magasin soit visité le mercredi par:*

1. *Aucun Client.*
2. 5 *clients.*
3. *Au moins* 6 *clients.*

Exercise 3 *Un liquide contient* $9.3 \cdot 10^5$ *bactéries par litre. On prélève un échantillon de* $1mm^3$ *de ce liquide. Chaque bactérie a donc une probabilité* $p = 10^{-6}$ *de se trouver dans l'échantillon (on rappelle:* $1l = 10^6\ mm^3$*).*

1. *Déterminer le nombre moyen de bactéries par* mm^3*.*
2. *On note* X *le nombre aléatoire de bactéries dans l'échantillon.* X *suit une loi de poisson. Calculer les probabilités:* $P[X = 1], P[X \leq 2]$ *et* $P[X \geq 4]$*.*

Exercise 4 *La prévalence du daltonisme chez les femmes est de* 0.4%*. sur un échantillon de* 800 *femmes, on note* X *le nombre aléatoire de femmes daltoniennes.*

1. *Quelle est la vraie loi de* X *(on ne donnera que la forme générale).*

2. *On peut approcher la loi de X par une loi de Poisson. Pourquoi?.*

3. *Calculer la probabilité d'avoir au maximum 5 femmes atteintes de daltonisme.*

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1:

1. il s'agit d'une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et probabilité $p = 0.85, X \rightsquigarrow B(n = 20, p = 0.85)$.

2. $E(X) = n \times p = 20 \times 0.85 = 17$,
   la variance $V(X) = n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0.85 \times (1 - 0.85) = 2.55$
   Ecart-type: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.55} \simeq 1.597$.

3. X suit une loi binomiale alors on utilise la loi

$$P[X = k] = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

Il faut écrire l'évènement $\{X \geq 15\}$ en terme d'évènements de la forme $\{X = k\}$ qui sont les seuls dont on connaît les probabilités (grâce à la loi de la variable).

$P[X \geq 15] = P[X = 15] + P[X = 16] + P[X = 17] + P[X = 18] + +P[X = 19] + P[X = 20] =$
$= C_{20}^{15}(0.85)^{15}(0.15)^{20-15} + C_{20}^{16}(0.85)^{16}(0.15)^{20-16} + C_{20}^{17}(0.85)^{17}(0.15)^{20-17} +$
$+ C_{20}^{18}(0.85)^{18}(0.15)^{20-18} + C_{20}^{19}(0.85)^{19}(0.15)^{20-19} + C_{20}^{20}(0.85)^{20}(0.15)^{20-20} =$
$= 0.1028 + 0.1821 + 0.2428 + 0.2293 + 0.1368 + 0.0388$
$= 0.9327.$

Corrigé de l'exercice 2: On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients reçus par jour dans le magasin, par hypothèse:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda = 4)$$

$$E(X) = V(X) = \lambda = 4.$$

1. Comme $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda = 4)$, on a :$P[X = k] = \frac{\exp^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$, pour $k = 0$ client (aucun client), on trouve

$$P[X = 0] = \frac{\exp^{-4} \times (4)^0}{0!} = \exp^{-4} \simeq 0.0183.$$

2. En appliquant de nouveau la formule de la loi de Poisson, on a:

$$P[X = 5 \text{ clients}] = \frac{\exp^{-4} \times (4)^5}{5!} \simeq 0.156.$$

3. $P[\text{au moins 6 clients}] = P[X \geq 6]$.

Remarque: il faut écrire l'évènement $\{X \geq 6\}$ en terme d'évènements de la forme $\{X = k\}$ qui sont les seuls dont on connaît les probabilités (grâce à la loi de la variable). Pour éviter d'avoir à écrire une somme infinie pour $\{X \geq 6\}$, on utilise le complémentaire de cet évènement.

$$P[X \geq 6] = 1 - P[X < 6] = 1 - P[X \leq 5] =$$

$$1 - \left(P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5]\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{\exp^{-4} \times (4)^0}{0!} + \frac{\exp^{-4} \times (4)^1}{1!} + \frac{\exp^{-4} \times (4)^2}{2!} + \frac{\exp^{-4} \times (4)^3}{3!} + \frac{\exp^{-4} \times (4)^4}{4!} + \frac{\exp^{-4} \times (4)^5}{5!}\right)$$

$$= 0.215.$$

Corrigé de l'exercice 3:

1. $X \rightsquigarrow B(n = 9.3 \times 10^5, p = 10^{-6})$ on sait que $E(X) = n \times p$,

$$E(X) = 9.3 \times 10^5 \times 10^{-6} = 0.93.$$

2. Comme: $\begin{cases} \mathbf{n} = 9.3 \times 10^5 > 50 \\ \mathbf{p} = 10^{-6} < 0.1 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{p} = 0.93 < 10 \end{cases}$, les conditions énoncées dans le cours sont vérifiées, et on utilisera effectivement l'approximation par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p = 0.93$, $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda = 0.93)$

$$B(n = 9.3 \times 10^5, p = 10^{-6}) \approx \mathcal{P}(\lambda = n \times p = 0.93).$$

- $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda = 0.93)$: pour $k \in \mathbb{N}$, $P[X = k] = \frac{\exp^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!} = \frac{\exp^{-0.93} \times (0.93)^k}{k!}$.
- $P[X = 1] = \frac{\exp^{-0.93} \times (0.93)^1}{1!} = 0.3669.$
- $P\{X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]$
  $= \frac{\exp^{-0.93} \times (0.93)^0}{0!} + \frac{\exp^{-0.93} \times (0.93)^1}{1!} + \frac{\exp^{-0.93} \times (0.93)^2}{2!}$
  $= 0.3946 + 0.3669 + 0.1706$
  $= 0.9321.$
- $P[X \geq 4] = 1 - P[X < 4] = 1 - P[X \leq 3]$
  $= 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3])$
  $= 1 - \left(\frac{\exp^{-0.93} \times (0.93)^0}{0!} + \frac{\exp^{-0.93} \times (0.93)^1}{1!} + \frac{\exp^{-0.93} \times (0.93)^2}{2!} + \frac{\exp^{-0.93} \times (0.93)^3}{3!}\right)$
  $= 0.3946 + 0.3669 + 0.1706 + 0.0529$
  $= 0.015.$

Corrigé de l'exercice 4:

1. $X \rightsquigarrow B(n = 800, p = 0.004)$ (X suit la loi binomiale avec deux paramètres $n = 800$, $p = 0.004$).

2. Comme $\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{n} = 800 > 50 \\ \mathbf{p} = 0.004 < 0.1 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{p} = 800 \times 0.004 = 3.2 < 10 \end{array} \right.$ donc

   on peut approximer la loi binomiale par la loi de Poisson, c'est à dire $B(n = 800, p = 0.004) \approx \mathcal{P}(\lambda = 3.2)$.

3. $P[X \leq 5] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3]+$
   $+P[X = 4] + P[X = 5]$
   $= \frac{\exp^{-3.2} \times (3.2)^0}{0!} + \frac{\exp^{-3.2} \times (3.2)^1}{1!} + \frac{\exp^{-3.2} \times (3.2)^2}{2!} + \frac{\exp^{-3.2} \times (3.2)^3}{3!} + \frac{\exp^{-3.2} \times (3.2)^4}{4!} \frac{\exp^{-3.2} \times (3.2)^5}{5!}$
   $= 0.0408 + 0.1304 + 0.2087 + 0.2226 + 0.1781 + 0.1140$
   $= 0.8946.$