Lois usuelles

Lois usuelles discrètes

1 Loi de Bernoulli:

Definition 1. *toute expérience aléatoire menant à deux résultats possibles: Succès ou Échec, est appelée épreuve de Bernoulli.*

Example 1. *Pile ou Face; Fille ou Garçon......*

Definition 2. *Soit une épreuve de Bernoulli et soit X une variable aléatoire prenant comme valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.*

$$X : \Omega \to E = \{0, 1\}$$

$$\omega \mapsto X(\omega)$$

*X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p notée : $X \rightsquigarrow B(1, p)$.*

1.1 Loi de probabilité de X:

$$P[X = 1] = p$$

$$P[X = 0] = 1 - p = q \text{ ou } p + q = 1$$

$$P[X = k] = p^k(1 - p)^{1-k}$$

Paramètres:

- $X \rightsquigarrow B(1, p)$.
- ***Espérance :*** $E[X] = p$.
- ***Variance*** : $V[X] = p \times q$ avec $q = 1 - p$.

Proof. $* \; E[X] = \sum_{i=1}^{k} X_i \times P[X = x_i] = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p.$

$* \; V[X] = E[X^2] - [E[X]]^2 = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) - p^2$
$= p - p^2 = p(1 - p) = p \times q.$

■

Example 2. *On jette une pièce de monnaie équilibrée.*
$\Omega = \{pile, face\}$. *Soit X une variable aléatoire discrète avec:*

$$X(\omega) = 1 \text{ si } \omega = pile$$

$$X(\omega) = 0 \ si \ \omega = face$$

$$P[X = 1] = p = \frac{1}{2} \ donc \ X \rightsquigarrow B(1, p = \frac{1}{2})$$

Example 3. *Une maladie M a une prévalence de 4%, on choisit au hasard un individu dans la population. Soit X une variable aléatoire discrète*

$$X(\omega) = 1 \ si \ \omega = malade$$

$$X(\omega) = 0 \ si \ \omega = non - malade$$

$$P[X = 1] = p = 0.04 \ donc \ X \rightsquigarrow B(1, p = 0.04)$$

2 Loi Binomiale:

Definition 3. *Soit un schéma de Bernoulli et soit X la variable aléatoire qui associe au nombre de succès:*

$$X : \Omega \to E = \{1, ..., n\}$$

$$\omega \mapsto X(\omega)$$

X suit une ***loi binomiale*** *de paramètres n et p : $X \rightsquigarrow B(n, p)$.*

2.1 Loi de probabilité:

Probabilité de l'obtention de k succès au cours de n épreuves indépendantes.

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$$

$$P[X = k] = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k} \ avec \ C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

Propriété:

La somme de n variables de Bernoulli ***indépendantes*** *de paramètre p est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p*

$$X_i \rightsquigarrow B(1, p), \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ X_i \ indépendantes$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S_n \rightsquigarrow B(n, p)$$

Remarque 1. *Une variable de Bernoulli est un cas particulier d'une variable binomiale.*

Exercise 1. *Soit $S_n \rightsquigarrow B(n, p)$. Calculer $E[S_n]$ et $V[S_n]$.*

Correction:

$$E\left[S_n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = n \times p.$$

$$V\left[S_n\right] = V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V\left[X_i\right] = n \times p \times (1-p).$$

A retenir:

$$\mathbf{X} \rightsquigarrow \mathbf{B}(\mathbf{n}, \mathbf{p}).$$

Espérance: $\mathbf{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{np}$.

Variance : $\mathbf{V}\left[\mathbf{X}\right] = \mathbf{npq} = \mathbf{np}(1-\mathbf{p})$ ***avec*** $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$.

Example 4. *On jette* 10 *fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Soit* X *une variable aléatoire qui ssocie à ces* 10 *lancers de pièce le nombre de pile.*

Quelle est la probabilité d'avoir un total de 8 *piles?*

Correction: $X \rightsquigarrow B(n = 10, p = \frac{1}{2})$

$$P\left[X = k\right] = P\left[X = 8\right] = C_{10}^{8} \times (\tfrac{1}{2})^{8} \times (1 - \tfrac{1}{2})^{10-8} = 0.0439.$$

Example 5. *On veut modéliser le nombre de garçons dans une famille de* 6 *enfants, chaque naissance* $i(i \in \{1, 2, ..., 6\})$ *peut être considérée comme une variable aléatoire* X.

Quelle est la probabilité d'avoir 4 *garçons.?*

Correction: $X \rightsquigarrow B(n = 6, p = \frac{1}{2})$

$$P\left[X = k\right] = P\left[X = 4\right] = C_{6}^{4} \times (\tfrac{1}{2})^{4}(1 - \tfrac{1}{2})^{6-4} = 0.2344.$$

Example 6. *Un étudiants veut passer un concours de types QCM comportant* 10 *questions, pour chaque question* 4 *réponses sont proposés dont une seule est juste.*

Quelle est la probabilité qu'il réussisse? (pour réussir, il doit répondre à 5 *questions au moins).*

Correction: *X représente le nombre de réponses juste parmi* 10 *questions. Ici:* $X \rightsquigarrow B(n = 10, p = \frac{1}{4})$

$$P\left[X = k\right] = C_{n}^{k} \times (\tfrac{1}{4})^{k} \times (1 - \tfrac{1}{4})^{n-k},\ k = \overline{0, 10} = 0, 1, 2, ..., 10$$

$P\left[X \geq 5\right] = P\left[X = 5\right] + P\left[X = 6\right] + P\left[X = 7\right] + P\left[X = 8\right] + P\left[X = 9\right] + P\left[X = 10\right] = 0.07812.$

3 Loi de Poisson:

Definition 4. *Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, on dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(\lambda \in \mathbb{R}^+)$ notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si:*

$$\forall k \in \mathbb{N} : P\left[X = k\right] = \frac{\exp^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

Paramètres:

$$E\left[X\right] = V\left[X\right] = \lambda$$

Proof. $E\left[X\right] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot P\left[X = k\right] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\exp^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \exp^{-\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \exp^{-\lambda}\left[\lambda + \frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^3}{2!} + ... + \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right] = \exp^{-\lambda} \cdot \lambda \left[1 + \frac{\lambda}{1!} + ... + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] = \lambda \cdot \exp^{-\lambda} \cdot \exp^{\lambda} = \lambda.$ ■

Remarque 2. *Cette loi est souvent utilisée dans la modélisation des files d'attente: nombre de clients en attente à une caisse de supermarché, nombre de conducteurs passés à un péage pendant une période de temps.*

Example 7. *A un guichet d'une banque, on sait que le nombre moyen de clients par heure est de 12. On suppose que le nombre de clients par heure est distribué selon une loi de Poisson.*

Quelle est la probabilité pour qu'en une heure , le guichetier s'occupe de plus de 15 clients?

Correction: *Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 12$*

$P[X > 15] = 1 - P[X \leq 15] = 1 - \sum\limits_{k=0}^{15} \frac{\exp^{-12} \cdot 12^{15}}{15!} = 0.1556.$

Example 8. *Un standard téléphonique reçoit en moyenne 0.7 appel à la minute.*

Quelle est la probabilité pour que entre 09h59 et 10h, il reçoive:

1. *0 appel.*
2. *1 appel.*
3. *Plus d'un appel.*

Correction:

1. $P[X = 0] = \frac{\exp^{-0.7}(0.7)^0}{0!} = 0.4965$
2. $P[X = 1] = \frac{\exp^{-0.7}(0.7)^1}{1!} = 0.3476$
3. $P[X \leq 1] = P[X = 0] + P[X = 1] = 0.8441.$

4 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson:

Soit une variable aléatoire binomiale $X \rightsquigarrow B(n,p)$*, si* n *est assez grand et* p *est assez petit, alors on peut approcher la loi binomiale* $B(n,p)$ *par une loi de Poisson ayant la même espérance* $\mathcal{P}(\lambda = np)$*.*

Dans la pratique, on admet que cette approximation est satisfaisante lorsque:

$$\begin{cases} n \geq 50 \\ p \leq 0.1 \\ n \cdot p \leq 10 \end{cases}$$

Alors: $X \rightsquigarrow B(n,p) \approx \mathcal{P}(\lambda = np)$*.*

Example 9. *La probabilité pour qu'une personne soit allergique au médicament* M *est* $p = 0.0002$*, on considère un échantillon de* 10000 *personnes.*

Soit X *la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.*

1. *Déterminer la loi de* X*.*
2. *Calculer la probabilité que* 2 *personnes soient allergiques.*
3. *Quelle est la probabilité d'observer au moins* 3 *malades?*

Correction:

1. $X \rightsquigarrow B(n = 10000, p = 0.0002)$
2. *Comme* $\begin{cases} n = 10000 > 50 \\ p = 0.0002 < 0.1 \\ n \cdot p = 2 < 10 \end{cases}$

   alors on peut approximer la loi binomiale par la loi de Poisson

   $X \rightsquigarrow B(n = 10000, p = 0.0002) \approx \mathcal{P}(\lambda = np = 2)$*. Donc:*

   $$P[X = 2] = \frac{\exp^{-2} \cdot (2)^2}{2!} = 0.2706 \ .$$

3. $P[X \geq 3] = 1 - P[X < 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2])$
   $= 1 - \left(\frac{\exp^{-2} \cdot (2)^0}{0!} + \frac{\exp^{-2} \cdot (2)^1}{1!} + \frac{\exp^{-2} \cdot (2)^2}{2!} \right) = 1 - (0.1353 + 0.2706 + 0.2706) =$
   $= 0.3235$