

3- Opérateurs de symétrie et projection stéréographique

Exercice 1 :

Quelles sont les représentations matricielles des opérateurs de symétrie suivants :

3 $\perp$ (111) ; 4 // OX ; 4 // OZ ; 4 // OY ; m // (OX, OY) ; 2 // OX ; 3 // OZ ; 6 // OX.

Exercice 2 :

Quel est l'opérateur de symétrie engendré par la combinaison :

- 2 // OZ + C

- 4 // OZ + 4 // OX

- deux axes ternaires (X = 3) perpendiculaires aux faces (111) et (-111)

Exercice 3 :

Montrer par les projections stéréographiques que les opérations de symétrie suivantes sont équivalentes à d'autres combinaisons :

2/m ; 3/m ; 4/m ; 6/m ; 32 ; 42 ; 62.

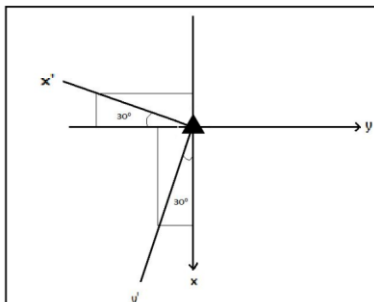
1- Opérateur de symétrie

Exercice 1

Axe 2 // OX : 2 $\Rightarrow$ rotation : $2\pi/2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Axe 3 // OZ : 3 $\Rightarrow$ Rotation de $2\pi/3 = 120^\circ$



$$\begin{cases} x' = -y \cos 30 - x \sin 30 \\ y' = x \cos 30 - y \sin 30 \\ z' = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -\sqrt{3}/2 y - 1/2 x \\ y' = \sqrt{3}/2 x - 1/2 y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Axe 4 // OX : 4 $\Rightarrow$ Rotation de $2\pi/4 = 90^\circ$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -z \\ z' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Axe 4 // OY : 4 $\Rightarrow$ Rotation de $2\pi/4 = 90^\circ$

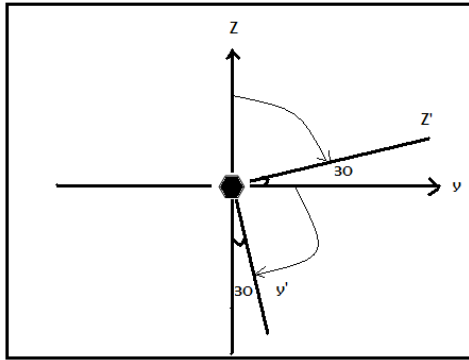
$$\begin{cases} x' = z \\ y' = y \\ z' = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Axe 4 // OZ : 4 $\Rightarrow$ Rotation de $2\pi/4 = 90^\circ$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Axe 6 // OX : 6 ⇒ Rotation de $2\pi/6 = 60^\circ$

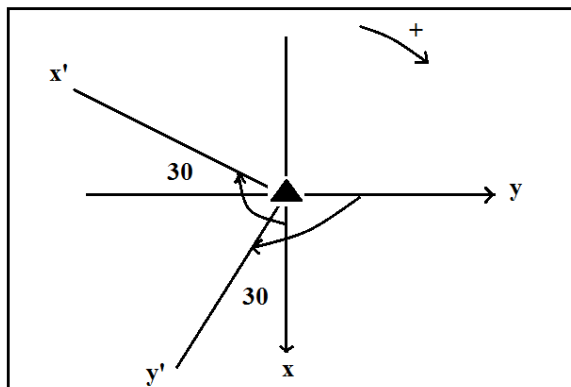


$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \sin 30 - z \cos 30 \\ z' = y \cos 30 + z \sin 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 1x \\ y' = 1/2 y - \sqrt{3}/2 z \\ z' = \sqrt{3}/2 y + 1/2 z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Axe 3 // OZ : ⇒ Rotation de $2\pi/3 = 120^\circ$



$$\begin{cases} x' = -x \sin 30 - y \cos 30 \\ y' = x \cos 30 - y \sin 30 \\ z' = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -1/2 x - \sqrt{3}/2 y \\ y' = \sqrt{3}/2 x - 1/2 y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

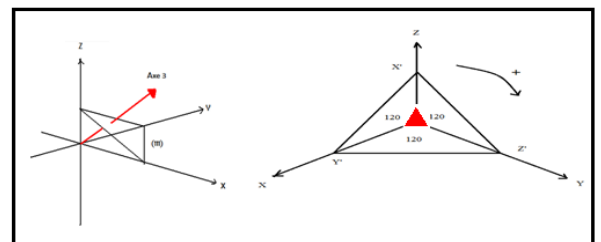
m // (OX,OY)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donc pour m // (xoz) on obtient :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

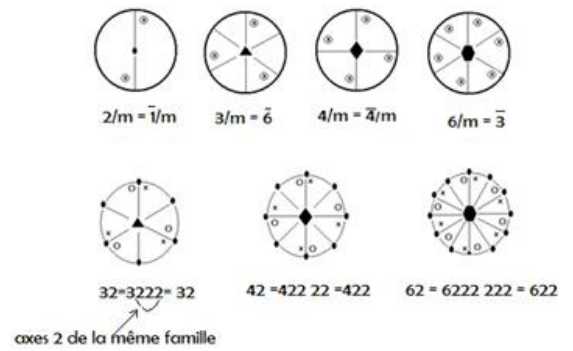
3 ⊥ (111) : 3 ⇒ rotation de $2\pi/3$



$$\begin{cases} x' = z \\ y' = x \\ z' = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Exercice 3



Exercice 2 :

2// OZ + C

L'opération de symétrie résultante d'une combinaison de deux opérations de symétries égal à la matrice finale fois la matrice initiale.

$$M_{2//OZ + C} = M_C \times M_{2//OZ}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_C \quad M_{2//OZ} \quad m//(OX,OY)$$

4//OZ + 4//OX

$$M_{4//OZ + 4//OX} = M_{4//OX} \times M_{4//OZ}$$

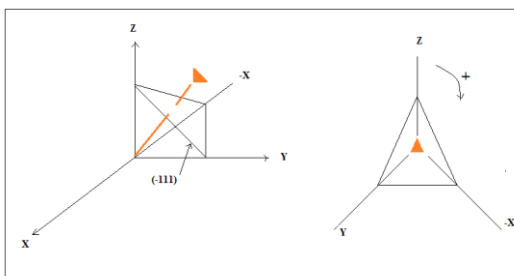
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{4//OX} \quad M_{4//OZ} \quad 3 \perp (1-11)$

3 $\perp$ (111) + 3 $\perp$ (-111)

$$M = M_{3 \perp (-111)} \times M_{3 \perp (111)}$$

3 $\perp$ (-111) :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$M_{3 \perp (-111)} \quad M_{3 \perp (111)} \quad M_{2//OY}$