Université Badji-Mokhtar, Annaba
Département de Mathématiques
Master 1: Contrôle Optimal, théorie et approximation

Module: Inéquations Variationnelles

Série sur l'approximation des inéquations variationnelles

Exercice 1 Soit le problème de l'obstacle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u) dx \geq \int\limits_{\Omega} f\,(v-u)\,dx, \qquad \forall v \in K \end{cases}$$

Où,

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \,/\ \ v \geq 0 \qquad \text{p.p dans } \Omega \right\}$$

$$f(x) = \sin(2\pi x), \quad \Omega = [0,1]^2$$

Discrétiser le problème par la méthode des éléments finis linéaires de degré 1

Exercice 2 Considérons le problème le problème de la torsion élastoplastique dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Soient } \ V = H_0^1(\Omega), \qquad \Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$$

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} u' v' dx$$

$$L(v) = \int\limits_{\Omega} f v dx, \quad f \in H^{-1}(\Omega)$$

$$K = \left\{ v \in V / \left| v' \right| \leq 1 \quad p.p \quad \text{dans } \Omega \right\}$$

Considérons le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a l'estimmation d'erreur suivante

$$\|u - u_h\|_V = o(h)$$

Exercice 3

Soit $\Omega \subset IR^2$ un domaine borné à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega,\ V = H^1(\Omega)$, le problème avec frottement simplifié est une inéquation variationnelle du second genre avec les données

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int\limits_{\Omega} (\nabla u.\nabla v + uv)\, dx \\ l(v) &= \int\limits_{\Omega} fvdx, \quad j(v) = g\int\limits_{\partial\Omega} |v|\, ds, \qquad g > 0 \end{aligned}$$

on suppose que $f \in L^2(\Omega)$, $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue, $l(.)$est une forme linéaire sur Vet $j(.)$ une fonctionnelle convexe propre et semi continue inférieurement sur$V$.
On suppose que pour le problème modèle $u \in H^2(\Omega)$. Soit $V_h \subset V$ un sous espace fermé de dimension finie de V, pour une partition régulière de Ω et pour tout i, $u/\Gamma_i \in H^2(\Gamma_i)$.

Soit $u \in V$ solution de l'inéquation variationnelle continu du second genre précédente.

1.Ecrire la forme de l'inéquation variationnelle discrète associée

2. Montrer que

$$\underset{h\to 0}{Lim} \|u - u_h\|_V = 0$$

Sachant qu' il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et u telle que

$$\|u - u_h\|_V^2 \leq C\|u - v_h\|_V^2 + a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) - l(v_h - u)$$