Approximation interne des inéquations variationnelles de première et deuxième espèce

April 19, 2020

Contents

0.1 Approximation interne de l'I.V.E du premier genre

Problème continu

considérons notre problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que} \\ a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \,, \ \forall v \in K \end{cases} \tag{1.1}$$

L'approximation par élément finis de la solution de l'I.V (1.1) peut être décrite comme suite:

Soient données: un paramètre $h \to 0$ et une famille $\{V_h\}_h$ de sous espace de dimension finis dans V.

Soit aussi une famille $\{K_h\}_h$ de sous ensembles fermés convexes non vides de V

tel que $K_h \subset V_h$ et $\cap$ $K_h \subset K$ et qui vérifie

1. Si $v_h \in K_h$ $\forall h$ et $\{v_h\}_h$ est bornée dans V. Alors la limite faible de $v_h \in K$

2. $\exists$ $E \subset V$, $E = K$ et $r_h : E \to K_h$ tels que $\lim\limits_{h\to 0} r_h v = v$ fortement dans V.

Theorem 1 *L'approximation du problème (1.1) est alors*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Trouver } u_h \in K_h \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq \langle f, v_h - u_h \rangle, \ \forall v_h \in K_h \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Theorem 2 *Le problème (1.2) admet une unique solution.*

Proof. Même démonstration du théorème 1.1(voir le chapitre précédent) en remplaçant V parV_h et K parK_h . ∎

Résultat de convergence

Theorem 3 *Sous les hypothèses ci dessus sur K et K_h, on a*

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

Proof. *(Voir le polycope)* ∎

0.1.1 Estimation d'erreur

Theorem 4 *Sous les hypothèses données sur K et K_h, il existe une constante $C > 0$ indépendante*

de h et de u telle que:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V \quad \leq \quad & C \left(\inf_{v_h \in K_h} \left\{ \|u - v_h\| + |a(u, v_h - u) - \langle f, v_h - u \rangle|^{\frac{1}{2}} \right\} + \right. \\ & \left. \inf_{v\in K} \left\{ |a(u, v - u_h) - \langle f, v - u_h \rangle|^{\frac{1}{2}} \right\} \right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Proof. De (1.1) et (1.2), on a:

$$a(u, u) \leq a(u, v) - \langle f, v - u \rangle$$

$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) - \langle f, v_h - u_h \rangle, \forall v_h \in K_h$$

En utilisant ces relations, la $V-$ellipticité de la forme bilinéaire, on obtient

$\forall v \in K$, et $\forall v_h \in K_h$,

$$\begin{aligned}
\alpha \|u-u_h\|_V^2 &\leq a(u-u_h, u-u_h) \\
&\leq a(u,u) + a(u_h,u_h) - a(u,u_h) - a(u_h,u) \\
&= a(u, v-u_h) + a(u_h, v_h-u) - \langle f, v-u_h\rangle - \langle f, v_h-u\rangle \\
&= a(u, v-u_h) - \langle f, v-u_h\rangle + a(u, v_h-u) - \langle f, v_h-u\rangle + \\
&\quad a(u_h-u, v_h-u)
\end{aligned}$$

On a

$$a(u_h-u, v_h-u) \leq M\|u_h-u\| \|v_h-u\| \tag{(*)}$$

Par appication de l'inéggalité de Young à (*) on obtient,

$$a(u_h-u, v_h-u) \leq \frac{\alpha}{2}\|u_h-u\|_V^2 + \frac{M^2}{2\alpha}\|v_h-u\|_V^2$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\alpha \|u-u_h\|_V^2 &\leq [a(u, v-u_h) - \langle f, v-u_h\rangle] + [a(u, v_h-u) - \langle f, v_h-u\rangle] + \\
&\quad + \frac{\alpha}{2}\|u_h-u\|_V^2 + \frac{M^2}{2\alpha}\|v_h-u\|_V^2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|u-u_h\|_V &\leq C\,(\inf_{v_h\in K_h}\left\{\|u-v_h\| + |a(u, v_h-u) - \langle f, v_h-u\rangle|^{\frac{1}{2}}\right\} + \\
&\quad \inf_{v\in K}\left\{|a(u, v-u_h) - \langle f, v-u_h\rangle|^{\frac{1}{2}}\right\})
\end{aligned}$$

■

0.2 Approximation d'inéquation variationnelle du second genre

0.2.1 Problème continu

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ solution de} \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq \langle f, v-u\rangle, \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{2.1}$$

0.2.2 Problème approché(discret)

0.2.3 Approximation de V

Soient une paramètre $h \to 0$ et une famille $\{V_h\}_h$ de sous espaces de dimensions finis dans V.

Nous supposons que $\{V_h\}_h$ satisfait:

$$\begin{aligned}\exists E &\subset V \text{ tel que } \overline{E} = V \text{ et } \forall h > 0 \;\; \exists\, r_h : E \to V_h \text{ tel que} \\ \lim_{h\to 0} r_h v &= v \text{ fortement dans } V.\end{aligned}$$

Approximation de (2.1)

L'analogue discret du problème (2.1) est alors

$$\begin{gathered}\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ solution de} \\ a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geq \langle f, v_h - u_h \rangle\,, \quad \forall v_h \in V_h\end{gathered} \tag{2.2}$$

Theorem 5 *Le problème (2.2) admet une unique solution.*

Proof. *La démonstration est immédiate en remplaçant V par V_h dans le théorème 1.1.* ■

Résultat de convergence

Theorem 6 *Sous l'ypothèse ci-dessus de V_h , on a*

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\| = 0$$

Proof. Voir le polycope.

Theorem 7 *Il existe une constante $C > 0$ indépendanté de h, telle que*

$$\|u - u_h\|_V \leq C\, (\inf_{v_h \in V_h} \left\{ \|u - v_h\| + |a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) - \langle f, v_h - u \rangle|^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{1.3}$$

■

$$\begin{gathered} + \\ \inf_{v\in V} \left\{ |a(u, v - u_h) - \langle f, v - u_h \rangle|^{\frac{1}{2}} \right\}) \end{gathered} \tag{1}$$

Proof. Soit $v = u_h$ dans (1.1) et en ajoutant le résultat sur l'I.V (1.2, on obtient,

$$a(u, v_h - u) + a(u_h, v_h - u) + j(v_h) - j(u) \geq \langle f, v_h - u \rangle\,, \qquad \forall v_h \in V_h$$

En utilisant la relation de V ellipticité de $a(.,.)$,

$$
\begin{aligned}
\alpha\left\|u-u_h\right\|_V^2 &\leq a(u-u_h,u-u_h)\\
&= -a(u,u_h-u)-a(u_h,u-u_h)\\
&= -a(u,u_h-u)-a(u_h,u-v_h+v_h-u_h)\\
&= -a(u,u_h-u)-a(u_h,v_{h-}u_h)+a(u,v_h-u)\\
&\quad M\left\|u_h-u\right\|\left\|v_h-u\right\|+a(u,v_h-u)+j(v_h)-j(u)-\langle f,v_h-u\rangle\\
&\quad \frac{\alpha}{2}\left\|u_h-u\right\|_V^2+\frac{M^2}{2\alpha}\left\|v_h-u\right\|_V^2+a(u,v_h-u)+j(v_h)-j(u)\\
&\quad -\langle f,v_h-u\rangle
\end{aligned}
$$

On conclut dans ce cas que

$$
\begin{aligned}
\left\|u-u_h\right\|_V &\leq C\ (\inf_{v_h\in V_h}\left\{\left\|u-v_h\right\|+\left|a(u,v_h-u)+j(v_h)-j(u)-\langle f,v_h-u\rangle\right|^{\frac{1}{2}}\right\}+\\
&\quad \inf_{v\in V}\left\{\left|a(u,v-u_h)-\langle f,v-u_h\rangle\right|^{\frac{1}{2}}\right\}\\
&\quad \inf_{v\in V}\left\{\left|a(u,v-u_h)-\langle f,v-u_h\rangle\right|^{\frac{1}{2}}\right\})
\end{aligned}
$$

■

0.3 Approximation par la méthode des éléments finis pour les inéquations variationnelles elliptique du second ordre

0.3.1 Le problème continu

Soit

$$V=H_0^1(\Omega)=\left\{v\in H^1(\Omega)/v/\Gamma=0\right\}$$

Avec:

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\nabla v dx,\qquad \forall u,v\in V$$

$$\langle f, v\rangle = \int_{\Omega} fvdx$$

Concernant l'obstacle

$$\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right) \text{ et } \psi/\Gamma \leq 0$$

L'essemble convexe est définit par

$$K = \left\{v \in H_0^1(\Omega)/v \geq \psi \ p.p \text{ dans } \Omega\right\}$$

La formulation variationnelle faible est donnée par

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle, \quad \forall v \in K \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Theorem 8 *Le problème (3.1) admet une solution unique*

Proof. la preuvé déttaillé dans le polycope (à voir) ■

Régularité de la solution

Theorem 9 *Soit Ω un ouvert borné de IR^2 de frontière suffisamment régulière si*

$$\langle f, v\rangle = \int_{\Omega} fvdx \textit{ avec } f \in L^P(\Omega), \quad 1 < P < \infty$$

et

$$\psi \in W^{2,P}(\Omega)$$

Alors la solution du problème de l'obstacle (3.1) est dans $W^{2,P}(\Omega)$
Proof. La démonstration se trouve dans les travaux de Brezis et Stampacchia.

Theorem 10 *Si Γ est assez régulière, si $\psi = 0$ et si $\langle f, v\rangle = \int_{\Omega} fvdx$ avec $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution*

■

du problème (3.1) satisfait

$$u \in K \cap H^2(\Omega), \quad \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Proof. La démonstration détaillée dans le polycope. ■

0.3.2 Inéquation variationnelle discrète

Nous allons maintenant introduire le problème discret et effectuer une étude similaire à celle entreprise précédemment pour le problème continu. Toutes les démonstrations qui ne sont pas données explicitement sont exactement les mêmes que dans le cas continu. Et pour insister sur la symétrie de l'étude, nous suivrons exactement la même démarche qu'au cas continu. Avant de passer à ces demarches, on va donner quelques résultats et défintions pour fixer les idées.

Quelques résultats et défintions

Definition 11 *Un n-simplexe K de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermée de $n+1$ points $(M_s)_{1\leq s\leq n+1}$, qui appelées sommets de K.*

les sommets ou noeuds du maillage τ^h sont les sommets des n-simplexes $(K_s)_{1\leq s\leq n+1}$, qui le composant. Par convention, le paramétre h désigne le maximum des diamétres des n-simplexes $(K_s)_{1\leq s\leq n+1}$.

$$h = \max_{K\in\ \tau^h}(diam(K))$$

Definition 12 *Un maillage régulier est un maillage dont tous les éléments sont réguliers (équilatéraux lorsqu'il s'agit de triangles), en outre soit τ^h, $h>0$ une famille de maillage de Ω. On dit qu'il s'agit d'une famille de maillage réguliers si:*

1- h qui est définie précédemment tend vers zéro.

2- Il existe une constante C telle que, pour tout $h>0$ et tout $(K_s)_{1\leq\ s\ \leq m(h)}$ dans τ^h,

$$\frac{h}{\rho(K_s)} \leq C.$$

où $\rho(K_s)$, définie comme étant le diamètre de la plus grande boule contenue dans K_s.

Definition 13 *On dit que le domaine Ω est polyédrique si $\bar{\Omega}$ est une réunion finie de polyédres de $\mathbb{R}^n$, où $\bar{\Omega}$ désigne l'adhérence du domaine Ω.*

Remark 14 *Rappelons qu'un polyèdre est une intersection fnie de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$ et que les parties de son bord qui appartiennent à un seul hyperplan sont appelées les faces.*

Definition 15 *Soit Ω un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n$. Un maillage triangulaire ou une triangulation de $\bar{\Omega}$ est un ensemble τ^h de n-simplexes $(K_s)_{1\leq\ s\ \leq m(h)}$ qui vérifient:*

1. $K_s \in \bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega} = \cup_{s=1}^{m(h)} K_s$.

2. L'intersection $K_i \cap K_j$ de deux n-simplexes distincts est un n-simplexe, dont tous les sommets sont aussi des sommets de K_i et K_j.

Definition 16 *On dit que la famille τ^h est quasi-uniforme s'il existe une constante c telle que*

$$\forall h,\ \forall K_s \in \tau^h,\ h_K \geq ch.$$

Definition 17 *On dit que les espaces V_h, $h > 0$ forment une approximation interne (on parle aussi d'approximation conforme de V) si :*

1. *Pour tout $h > 0$, $V_h \subset V$.*
2. *Pour tout $v \in V$ il existe $v_h \in V_h$ tel que :*

$$\| v - v_h \|_v \to 0 \quad quand \quad h \to 0.$$

Il est également souhaitable que cet espace V_h soit facile a construire, on pourra choisir un espace formé de polynômes ou des fonctions polynôminales par morceaux, etc. On établit sur Ω une triangulation τ^h de triangles K, et soit p le pôlynome de degré 1 défini sur K par P_1 :

$$P_1 = \{p : p(x, y) = ax + by + c; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

L'introduction de polynômes de degré supérieur n'a pas été envisagée dans la mesure où les propriétés de régularité rencontrées ne semblent pas permettre d'entirer partie.

0.3.3 Discrétisation

Dans cette section, on va introduire la discrétisation des I.V, par les élements finis afin d'étudier leur convergence et leur approximation qui sera necessaire plus tard. Nous voulons construire un sous-espace V_h de type éléments finis triangulaires.

On établit sur Ω une triangulation régulière, quasi-uniforme τ^h de Ω, et considérons l'espace V_h d'éléments finis conformes

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \cap V \ / \ v_{h|K} \in P_1,\ \forall K \in \tau^h\}. \tag{3.1.1}$$

Soit M_s, $s = 1, 2, ..., m(h)$ les sommets de la famille de triangulation τ^h qui n'appartiennent pas à $\partial\Omega$.

Nous notons par φ_s, $s = 1, 2, ..., m(h)$ les fonctions de bases usuelles tel que $\varphi_s(M_l) = \delta_{sl}$, ($\delta_{sl}$ symbôle de Kronecker).

Remark 18 *$dim(V_h) < \infty$ donc, il existe une base telle que $\varphi_s, s = 1, 2, ..., m(h)$ les fonctions de base.*

Soit aussi r_h, l'opérateur d'interpolation défini par : $\forall v \in C(\bar{\Omega}) \cap V$

$$r_h v = \sum_{s=1}^{m(h)} v(M_s)\varphi_s(x, y). \tag{3.1.2}$$

Rappelons maintenant quelques propriétés élémentaires de ce type d'approximation
:

$$\varphi_s(x,y) \geq 0,\ \forall 1 \leq s \leq m(h) \quad et \quad \sum_{s=1}^{m(h)} \varphi_s \ = 1 \tag{3.1.3}$$

et

$$\| r_h u - r_h v \|_{C(\bar{\Omega})} \leq \| u - v \|_{C(\bar{\Omega})} \tag{3.1.4}$$

L'ordre sur V_h sera celui induit par $\mathbb{R}^{m(h)}$.

0.3.4 Problème discret

Considérons le problème discret associé au problème (3.1)

$$\left\{ \begin{array}{c} Trouver\ u_h \in K_h\ solution\ de \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h),\ \forall v_h \in K_h, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

où

$$K_h = \left\{ v_h \in V_h \ / \ v_h \leq r_h \psi \ dans\ \tau^h \right\}. \tag{3.3}$$

Existence et unicité de la solution discrète

Theorem 19 *Sous les notations et les hypothèses précédentes, le problème (3.2) admet une solution unique.*

Proof. Simillaire au cas continue. ■

Caracterisation de la solution discrète d' I.V comme enveloppe des sous-solutions discrète

Definition 20 *Soit X_h l'ensemble des sous-solutions pour l'I.V discrète, c'est-à-dire l'ensemble des $Z_h \in V_h$ telles que :*

$$\left\{ \begin{array}{c} a(Z_h, \varphi_s) \leq (f, \varphi_s), \forall\ \varphi_s \in K_h,\ s = \overline{1, m(h)} \\ Z_h \leq r_h \psi,\ \ \varphi_s \geq 0. \end{array} \right.$$

Theorem 21 *Sous les hypothéses et notations précédentes, la solution discrète u_h de l'I.V discrète est le plus grand élément de X_h.*

Proof. Simillaire au cas continue. ■

Propriétés de monotonie de la solution discrète

On notera par $u_h = \partial_h(f)$ la solution du problème discret(3.2) par rapport le second membre f.

Proposition 22 *Sous les notations et hypothèses précédentes.*

$$Si\ f_1 \leq f_2\ alors\ \partial_h(f_1) \leq \partial_h(f_2).$$

Proof. La démonstration est simillaire au cas continue. ■

On notera par $u_h = \sigma_h(r_h\psi)$ la solution du problème discret (3.2) par rapport l'obstacle ψ.

Proposition 23 *Sous les notations et les hypothèses précédentes.*

$$Si\ \psi_1 \leq \psi_2\ alors\ \sigma_h(r_h\psi_1)\ \leq \sigma_h(r_h\psi_2)\ .$$

Proof. La démonstration est simillaire à celle du cas continu. ■

On notera par $u_h = \partial_h(f, r_h\psi)$ la solution du problème discret (**??**) par rapport le second membre f et l'obstacle $r_h\psi$.

Proposition 24 *Sous les notations et hypothèses précédentes.*

$$Si\ f_1 \leq f_2\ et\ \psi_1 \leq \psi_2\ alors\ \partial_h(f_1, r_h\psi_1) \leq \partial_h(f_2, r_h\psi_2).$$

Proof. La démonstration est simillaireà celle du cas continu.
■

On note $\partial_h(f + a_0\alpha)$ (resp. $\partial_h(f)$) la solution discrète par rapport au second membre $f + a_0\alpha$ (resp. f).

Proposition 25 *Pour tout* $\alpha \geq 0$ *on a :* $\partial_h(f + a_0\alpha) \leq \partial_h(f) + \alpha$.

Proof. La démonstration est simillaire à celle du cas continu. ■

Propriétés de Lipschitizianité de la solution discrète

Proposition 26 *Soient* $\partial_h(f_1)$ *et* $\partial_h(f_2)$ *les solutions discrètes par rapport aux seconds membre* f_1 *et* f_2 *respectivement. On a :*

$$\| \partial_h(f_1) - \partial_h(f_2) \|_\infty \leq \alpha \| f_1 - f_2 \|_\infty, \alpha \geq 0.$$

Proof. La démonstration est simillaire à celle du cas continu. ■

Proposition 27 *Soient* $\sigma_h(\psi_1)$ *et* $\sigma_h(\psi_2)$ *les solutions discrètes par rapport aux l'obstacles* ψ_1 *et* ψ_2 *respectivement. Alors,*

$$\| \sigma_h(\psi_1) - \sigma_h(\psi_2) \|_{L^\infty} \leq \| \psi_1 - \psi_2 \|_{L^\infty}$$

Proof. *La démonstration est simillaire à celle du cas continu.*

Proposition 28 *L'application* $\sigma_h(.)$ *est concave et pour* $\alpha \geq 0$, *on a :*

$$\sigma_h(\psi + \alpha) = \sigma_h(\psi) + \alpha.$$

Proof. *La démonstration est simillaire à celle cas continu.* ■

0.3.5 Régularité de la solution discrète

Comme dans le cas continu, la régularité de la solution discrète se démontre par le théorème suivant.

Theorem 29 *[?]Il existe une constante c indépendante de h telle que*

$$| a(u_h, \varphi_s) | \leq c \parallel \varphi_s \parallel_{L^1(\Omega),} \ \ \forall \varphi_s, s = 1, 2, ..., m(h)$$

Approximation par élément finis

Supposons par la suite que Ω est un domaine polygonal de IR^2, considérons une famille de triangulation classique τ_h de Ω.i.e

τ_h est un ensemble fini de triangles T vérifiant les conditions connues(Voir le cours élément finis ou le polycope)

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0 \left(\overline{\Omega} \right), v_h/T \in P_1, \quad \forall T \in \tau_h \right\}$$

$$K_h = K \cap V_h = \{ v_h \in V_h, v_h \left(P \right) \geq \psi \left(P \right) \}$$

Pour plus de détail voir le polycope

Proposition 30 *K_h est un sous ensemble convexe fermé non vide de V_h.*

Problème discret Le problème de l'obstacle discret est défin par

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq \langle f, v_h - u_h \rangle, \quad \forall v_h \in K_h \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Proposition 31 *Le problème (3.1) a une unique solution.*

Résultat de convergence

Theorem 32 *Pour une famille de triangulation régulière, et sous les suppositions précédente*

$$\lim_{h \to 0} \| u - u_h \|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

Où u et u_h sont les solutions de (3.1) et (3.2) respectivement.
Proof. Voir le polycope ■

Estimation d'erreur

Theorem 33 *Soit Ω un domaine plygonal, soit τ_h une famille de triangulation régulière.*

Alors il esiste une constante $C > 0$ indépendante de h tel que:

$$\| u - u_h \|_V \leq Ch$$

Proof. Démonstration détaillée dans le polycope. ■

0.4 Extention du travail

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\partial\Omega$.

Pour $u, v \in V$, on pose la forme bilinéaire :

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1\le j\le n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0(x) uv \right) dx, \tag{4.1}$$

qui est une forme bilinéaire associée à l'opérateur A défini par

$$A = - \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{1\le j\le n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + a_0, \tag{4.2}$$

avec les coefficients $a_{i,j}(x)$, $a_j(x)$ et $a_0(x)$ sont suffisamment réguliers et $a_0(x)$ satisfait

$$a_0(x) \ge \beta > 0 \ , \forall x \in \Omega, \tag{4.3}$$

on suppose que la forme bilinéaire est continue

$$\exists M > 0 : a(u,v) \le M \parallel u \parallel_V \parallel v \parallel_V, \tag{4.4}$$

et fortement coercive

$$\exists \alpha > 0 : a(v,v) \ge \alpha \parallel v \parallel_V^2, \tag{4.5}$$

de plus, on considère le second membre f telle que :

$$f \in L^\infty(\Omega), \ \ f \ge 0 \ , \tag{4.6}$$

et un obstacle

$$\psi \in W^{2,p} \ (\Omega) \ \ \textit{telle que} \ \psi > 0 \ \ \textit{sur} \ \ \partial\Omega \ , \tag{4.7}$$

on pose

$$K = \{ \ v \in V \ / \ v \le \psi \ \ \textit{dans} \ \Omega \ \}. \tag{4.8}$$

Hypothèse du principe du maximum discret (p.m.d)

Definition 34 *Soit A une matrice carré telle que $a_{ss} > 0$ et $a_{ls} \le 0$ pour $l \ne s$. On dit que A est une M-matrice si A^{-1} existe et ses éléments sont tous non négatifs.*

0.4.1 Estimation d'erreur

Theorem 35 *Sous les notations et les hypothèses (4.1)-(4.8) et le (p.m.d), il existe une constante c indépendante de h telle que*

$$\| u - u_h \|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch^2 \mid \log h \mid^2 .$$

Idée de la démonstration

Première partie :

Construction d'une fonction discrète α_h proche de u qui vérifie :

$$\alpha_h \leq u_h \quad et \quad \|u - \alpha_h \|_{L^\infty} \leq ch^2 \mid \log h \mid^2 .$$

Deuxième partie :

Construction d'une fonction discrète β_h proche de u qui verifie :

$$u_h \leq \beta_h \quad et \quad \| u - \beta_h \|_{L^\infty} \leq ch^2 \mid \log h \mid^2,$$

la démonstration du théorème est alors

$$\| u-u_h \|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2 \, \|u-\alpha_h \|_{L^\infty} + \| u-\beta_h \|_{L^\infty} + \| \alpha_h-\beta_h \|_{L^\infty} \leq ch^2 \mid \log h \mid^2 .$$