Université Badji-Mokhtar, Annaba
Département de Mathématiques
Master 1: Contrôle Optimal, théorie et approximation

Module: Inéquations Variationnelles

Série sur les inéquations variationnelles elliptiques de première et deuxième espèce

Exercice 1

Montrer que si K est un sous espace de V , alors l'inéquation variationnelle

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle\ ,\ \forall v \in K, \quad u \in K$$

se réduit à une équation variationnelle.

Exercice 2

Soit le problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ J(u) = \min\limits_{v \in K} J(v) \end{cases}$$

Avec,

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + v^2) dx - \int_{\Omega} f v dx$$

Où Ω est un ouvert borné de IR^2 suffisament régulier, K est un convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert V,
et $f \in V^*$. Montrer que ce problème est équivalent à un problème d'inéquation variationnelle que l'on déterminera.

Exercice 3

Soit $\Omega \subset IR^N$ un domaine borné avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega,\ V = H^1(\Omega)$, On définit une forme bilinéaire sur $V \times V$:

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right) dx$$

Et une forme linéaire sur V :

$$L(v) = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma} gv ds$$

Où pour simplifier, nous supposons $f \in L^2(\Omega),\ g \in L^2(\Gamma)$.

1. a) Montrer que la solution d'I.V:

$$a(u, v-u) \geq L(v-u),\ \forall v \in K,\ u \in K \tag{(1)}$$

est solution de:

$$\begin{aligned} a(u,v) &\geq L(v),\ \forall v \in K \\ a(u,u) &= L(u),\ u \in K \end{aligned}$$

Où K est un cône convexe continu dans V :

$$K = \{v \in V / v \geq 0\ p.p \text{ sur } \Gamma\}$$

b) Montrer que u est solution du problème suivant:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u = f & p.p \text{ dans } \Omega \\ u \geq 0,\quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq g,\quad u\left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) = 0 \end{cases}$$

c)Soit α la constante de coercivité de $a(.,.)$, β la constante de continuité de $a(.,.)$

c.1 Montrer qu'il existe un nombre θ, $0 < \theta < 1$, tq:

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_V \leq \theta \|u_1 - u_2\|_V,\quad \forall u_1, u_2 \in V$$

Où pour $u \in V,\ \Phi(u) \in V'$(dual de V), définit par:

$$\langle \Phi(u), v\rangle = (u,v) - \rho a(u,v) + \rho \langle f, v\rangle,\ \forall v \in V$$

Avec ρ un nombre réel tq:

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{\beta^2}$$

c .2 Montrer que le problème (1) admet une solution unique.

Exercice 4

Soit $\Omega \subset IR^2$ un domaine borné à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega,\ V = H^1(\Omega)$, le problème avec frottement simplifié est une inéquation variationnelle du second genre avec les données

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + uv)\, dx \\ l(v) &= \int_\Omega fv dx,\quad j(v) = g\int_{\partial\Omega} |v|\, ds, \qquad g > 0 \end{aligned}$$

on suppose que $f \in L^2(\Omega)$, $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue, l (.)est une forme linéaire sur Vet $j(.)$ une fonctionnelle convexe propre et semi continue inférieurement sur$V$.

1.Montrer que la solution du problème trouvé est l'unique minimiseur de la fonctionnelle:

$$I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + j(v) - l(v)$$

2. Montrer que la solution du même problème est aussi solution de

$$\begin{cases} a(u,v) + j(v) \geq l(v) & \forall v \in V \\ a(u,u) + j(u) = l(u) & u \in V \end{cases}$$

3.Montrer que l'I.V du second genre avec les données précédente est formellement équivalente au problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leq g, \quad u\frac{\partial u}{\partial n} + g|u| = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

4. Soit $V_h \subset V$ un sous espace fermé de dimension finie de V, pour une partition régulière de Ω et pour tout i, $u/\Gamma_i \in H^2(\Gamma_i)$.

Soit $u \in V$ solution de l'inéquation variationnelle continu du second genre précédente.

a .Ecrire la forme de l'inéquation variationnelle discrète associée

b. On suppose que pour le problème modèle $u \in H^2(\Omega)$.Montrer que

$$\underset{h \to 0}{Lim} \|u - u_h\|_V = 0$$

Sachant qu' il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et u telle que

<u>Exercice 5</u>

Soit $\Omega \subset IR^N$ un ouvert borné et connexe, avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$,
et soit $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ qui satisfait:

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)\xi^2 \leq a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leq \alpha\xi^2, \text{ Pour } \xi \in IR^N, \quad x \in \Omega$$

Pour $\alpha \geq 1$,et on définit l'application $L : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ par

$$\langle Lu, v\rangle = a(u,v), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Où

$$a(u,v) = \int a_{ij}(x)\,\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\tfrac{\partial v}{\partial x_i}\; dx$$

Soit le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tq} \\ a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle, \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{(1)}$$

$f \in H^{-1}(\Omega)$, K est un sous ensemble convexe fermé non vide de $H^1(\Omega)$ définit par

$$K = \left\{v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq \psi \ \ p.p \text{ dans } \Omega\right\}$$

1) Soit u une solution du problème (1), on suppose que g est une sur-solution de $L - f$
satisfaisant $g \geq \psi$ dans Ω et $g \geq 0$ sur $\partial\Omega$.

Montrer que $u \leq g$ dans Ω.

2) Soient u et v deux sur- solutions de $L - f$, déduire que $w = Min(u,v)$ est
aussi sur solution de $L - f$.

3) Pour le cas d'une forme bilinéaire symétrique,

Montrer que toute solution d'un problème de minimisation qu'on déterminera est
aussi solution de l'inéquation variationnelle (1).

4) Pour $f = 0$, Soit $\beta : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ un opérateur monotone Lipschitzien,

telque $\beta u = 0$ ssi $u \in K$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, nous considérons le problème pénalisé

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \quad \text{tel que} \\ \left\langle Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta u_\varepsilon, v \right\rangle = 0, \forall v \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \qquad ((2))$$

On suppose que la suite $\{u_\varepsilon\}$ converge faiblement vers l'élément u dans $H^1(\Omega)$,
et qu'il existe une constante $c > 0$,indépendante de ε telle que
$(\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_{H^1(\Omega)} \leq c\varepsilon, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$.
Montrer que dans le cas où l'opérateur A est strictement monotone et continu,

l'élément u satisfait le problème (1) et par ailleurs, le problème (2) admet une unique
solution.