

Série N°1: D'analyse Math 2:

Exo 1: $I = \int_1^5 (1-x^2) dx$

1. En calculer l'intégrale à l'aide des sommes de Riemann:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{où} \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

on pose $f(x) = 1-x^2$ $b=5$, $a=1$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{5-1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + k \frac{5-1}{n}\right) = \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{4k}{n}\right)$$

$$= \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \left[1 - \left(1 + \frac{4k}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \left[1 - 1 - \frac{8k}{n} - \frac{16k^2}{n^2}\right] = \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \left[-\frac{8k}{n} - \frac{16k^2}{n^2}\right]$$

$$= \frac{4}{n} \left(-\frac{8}{n}\right) \sum_{k=1}^n k + \frac{4}{n} \left(-\frac{16}{n^2}\right) \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= -\frac{32}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{64}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

On a: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$S_n = -\frac{32}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{64}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= -\frac{16}{n^2} (n(n+1)) - \frac{32}{n^2} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{3}\right)$$