

TP N<sup>o</sup>3 : Approximation des EDP de type elliptique avec Matlab

TP (Un problème raide)

On considère le problème de type elliptique suivant

$$\begin{cases} -\varepsilon u_{xx}(x) + au_x(x) + bu(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = c, \\ u(1) = d, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\varepsilon, a, b, c, d$  sont des réels avec  $\varepsilon > 0$  et  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . On admettra que le problème (1) admet une solution unique  $u \in C^2([0, 1]; \mathbb{R})$ .

On se propose de discrétiser le problème (1) par la méthode des différences finies. Pour cela on prend une grille uniforme  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  de pas  $h = \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$ .

— En approchant la dérivée seconde  $u_{xx}$  par un schéma classique à trois points et la dérivée première  $u_x$  par un schéma centré, écrire le schéma de discrétisation du problème (1).

— Écrire ce schéma sous la forme  $AU = b$ , où  $U = (u_1, \dots, u_{n-1})^\top$  désigne le vecteur constitué de la solution approchée aux noeuds  $x_i$ .

— Montrer que ce système admet une unique solution pour tout  $h > 0$ .

— Écrire un script Matlab `U=raide(ε,a,b,c,d,f,n)` qui renvoie la solution approchée  $U$ .

Application:

— On prend  $\varepsilon = 1$ ,  $a = b = c = d = 0$  et  $f \equiv 1$ . Tracer dans ce cas la solution approchée du problème (1).

— On prend maintenant les valeurs  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$ ,  $d = e^{-2}$  et  $f \equiv 0$ . Tracer la solution approchée du problème (1).

— On prend une dernière fois  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$  et  $f \equiv 0$ . Tracer la solution approchée du problème (1).

— Que remarque-t-on? Pourquoi la solution dégénère en  $x = 0$ ?

— Calculer la solution exacte dans chacun des cas précédents.

— Trouver numériquement l'ordre de consistance du schéma précédent.

---

<sup>0</sup>Toutes les séries de TP peuvent être téléchargées depuis la page web de l'auteur:  
<https://sites.google.com/site/kouchetpmlab>