

Solution TP2: Approximation des EDO avec Matlab
Préparée par : Dr I. Djerrar et Pr L. Alem

Dans toute la suite le problème de Cauchy modèle sera le suivant

$$\begin{cases} y'(t) = fun(t, y(t)), t \in (t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

tspan désignera toujours le vecteur (t_0, T) .

Exercice 1:

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \cos 2y(t), t \in (0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- Écrire un script Matlab `u=euler(fun,tspan,n,y0,e)` qui renvoie la solution approchée u du problème (1) par le schéma explicite lorsque `e='expl'` et par le schéma implicite lorsque `e='impl'`.

Rappel:

Schéma d'Euler explicite

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{i+1} = u_i + hf_i \quad 1 \leq i \leq N \end{cases} \quad (3)$$

- On approche $y'(t_i)$ par la formule de dérivation à droite $y'(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}$.
- u_i est une approximation de $y_i = y(t_i)$ et $f_i = f(t_i, u_i)$.
- On calcul u_{i+1} directement à partir de u_i , la méthode d'Euler explicite est moins précise.

Schéma d'Euler implicite

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_i = u_{i-1} + hf_i \quad 1 \leq i \leq N \end{cases} \quad (4)$$

- On approche $y'(t_i)$ par la formule de dérivation à gauche $y'(t_i) = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1}))}{h}$.
- u_i est une approximation de $y_i = y(t_i)$ et $f_i = f(t_i, u_i)$.
- Pour calculer u_i à partir de u_{i-1} , on doit résoudre une équation dont l'inconnu est u_i , la méthode d'Euler implicite est plus précise mais coûteuse.

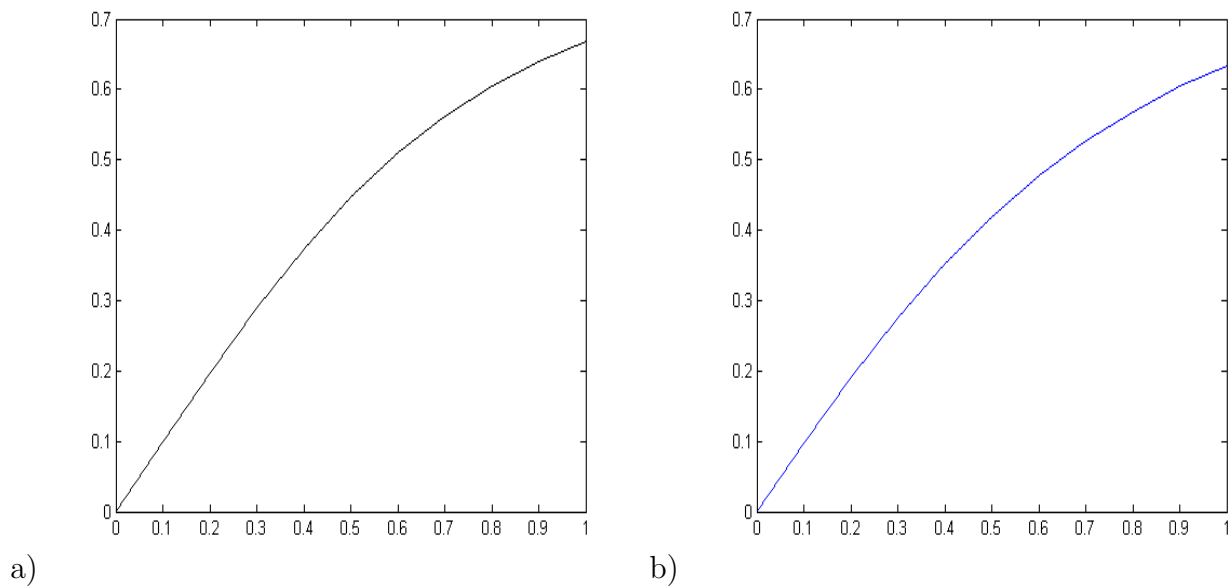


Figure 1: **a)** La solution approchée par le schéma d'Euler explicite, **b)** La solution approchée par le schéma d'Euler implicite.

Le script euler.m

```
function [tt,u]=euler(fun,tspan,N,y0,e)
h=(tspan(2)-tspan(1))/N;
tt=tspan(1):h:tspan(2);
u=zeros(N,1);
u(1)=y0;
if e=='impl';
for i=2:N+1;
ff=@(x)h*fun(tt(i),x)-x+u(i-1);
u(i)=fzero( ff, u(i-1) ); % pour résoudre l'équation on utilise
la commande fzero au voisinage de  $u_{i-1}$ 
end
plot(tt,u,'k');
elseif e=='expl';
for i=2:N+1;
u(i)=u(i-1)+h*fun(tt(i-1),u(i-1));
end
plot(tt,u)
end
```

Execution: Voir figure 1

```
>> fun = @(t,x) cos(2 * x)
>> tspan = [0, 1]
>> N = 10
>> y0 = 0
>> e = 'expl'
>> [tt,u] = euler(fun,tspan, N, y0, e)
>> e = 'impl'
>> [tt,u] = euler(fun,tspan, N, y0, e)
```

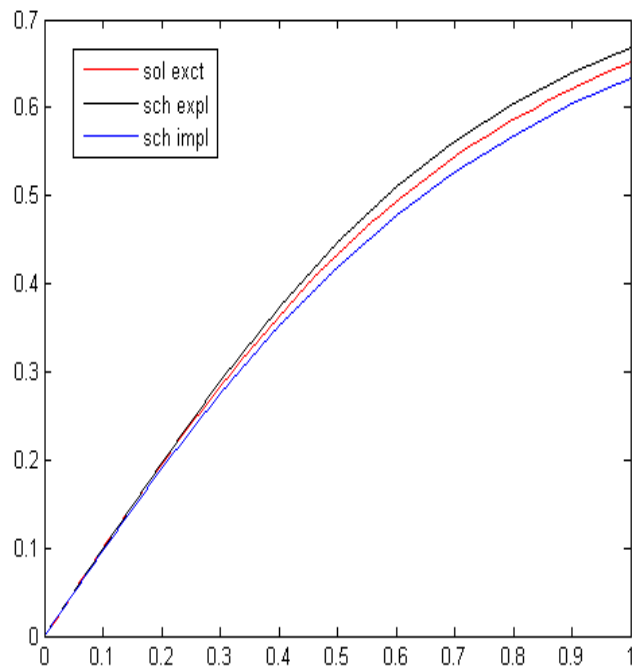


Figura 2: La solution exacte ainsi que les solutions approchées par les deux schémas.

- Tracer dans le même repère les solutions approchées par les deux schémas ainsi que la solution exacte pour $n = 10$.

```
>> y = @(x)(1/2) * asin((exp(4 * x) - 1)/(exp(4 * x) + 1))
>> fplot(y, [0, 1], 'r')
>> hold on
>> [tt, u] = euler(@(t, x) cos(2 * x), [0, 1], 10, 0, 'expl')
>> hold on
>> [tt, u] = euler(@(t, x) cos(2 * x), [0, 1], 10, 0, 'impl')
```

Voir figure 2.

- Tracer dans le même repère en $t = 1$ par les deux schémas pour n variant de 10 à 20 et en déduire que l'erreur est une fonction linéaire du pas h .

```
fun=@(t,x)cos(2*x);
tspan=[0 1];
y0=0;
y=@(x)(1/2)*asin((exp(4*x)-1)/(exp(4*x)+1));
h=1./(10:20);
for i=10:20;
[tt, u1]=euler(fun,tspan,i,y0,'expl');
[tt, u2]=euler(fun,tspan,i,y0,'impl');
er1(i)=abs(y(1)-u1(end));
er2(i)=abs(y(1)-u2(end));
end
loglog(h,er1(10:20),'r')
hold on
loglog(h,er2(10:20))
```

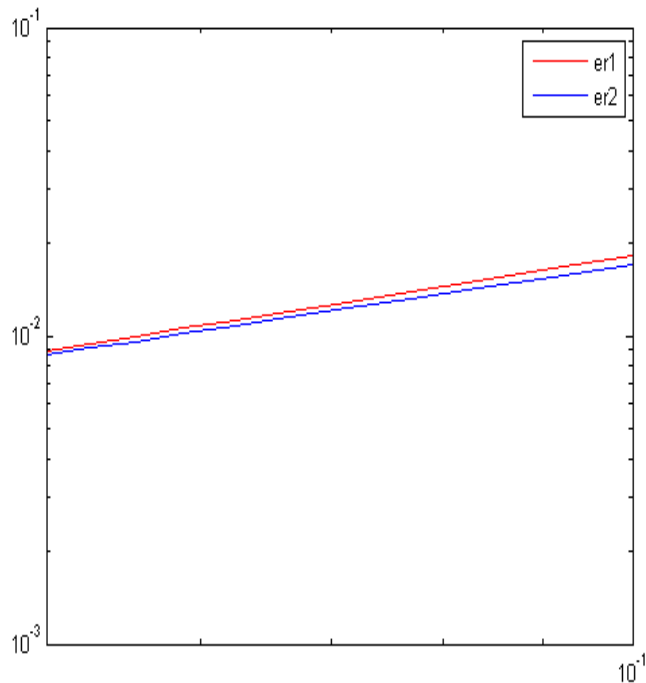


Figura 3: L'erreur en $t = 1$ pour le schéma d'Euler explicite "er1" et le schéma d'Euler implicite "er2".

Exécution: Voir figure 3

La figure 3 représente deux droites parallèles, l'erreur dépend linéairement de h .

Exercice 2: Méthode d'Adams

Rappel:

1) Les schémas multi-pas ont la forme suivante:

$$u_{i+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{i-j} + h \sum_{j=0}^p b_j f_{i-j} + h b_{-1} f_{i+1}, \quad p \leq i \leq n-1 \quad (5)$$

où $a = (a_0, a_1, \dots, a_p)$, $b = (b_0, b_1, \dots, b_p, b_{-1})$ sont des coefficients donnés et $p \geq 0$ est un entier.

- Ce schéma est dit $p+1$ pas.
- Si $b_{-1} = 0 \rightarrow$ schéma explicite.
Si $b_{-1} \neq 0 \rightarrow$ schéma implicite.
- Pour démarrer le schéma il nous faudra connaître $u_1, \dots, u_p$, qui doivent être calculés à partir d'un schéma d'amorçage.

2) La commande Matlab `dot(x,y)` permet de calculer le produit scalaire des deux vecteurs x et y .

Exemple

```
>> x = [1 2 3]
>> y = [6 4 5]
>> z = dot(x,y)
>> z = 29          "z = (1 * 6) + (2 * 4) + (3 * 5)"
```

- Écrire un script `adams(a,b,fun,y0,tspan,n,e)` qui renvoi la solution approchée u du problème de Cauchy (1) par la méthode multi-pas suivante (vue en cours).

Le script `adams.m`

```
function [t,u]=adams(a,b,f,y0,tspan,n,e)
p=length(a)-1;
t=linspace(tspan(1),tspan(2),n+1);
h=t(2)-t(1);
t=t';
u=zeros(n+1,1);
u(1)=y0;
u(2:p+1)=u(1:p)+h*f(t(1:p),u(1:p)); % calcul de  $u_2, \dots, u_{p+1}$  par le schéma
d'Euler explicite
if e=='expl'; %  $b_{-1} = 0$ 
for i=p+1:n;
u(i+1)=dot(a,u(i:-1:i-p))+h*dot(b,f(t(i:-1:i-p)...
,u(i:-1:i-p))); % le schéma multi-pas
end
elseif e=='impl'; %  $b_{-1} \neq 0$ 
for i=p+1:n;
u(i+1)=fzero(@(x)dot(a,u(i:-1:i-p))+h*dot(b(1:end-1),...
f(t(i:-1:i-p),u(i:-1:i-p)))...
-x+h*b(end)*f(t(i+1),x),u(i)));
end
end
```

Considérons le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - y^2, t \in (t_0, 1] \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

- Tracer l'erreur ϵ_i en fonction des noeuds h_i en utilisant la méthode d'Adams-Boshforth puis celle d'Adamas-Moulton à 2 pas.

Rappel:

Le schéma d'Adams-Boshforth:

$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_{i+1} = u_i + h(\frac{3}{2}f_i - \frac{1}{2}f_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (7)$$

de la forme

$$u_{i+1} = a_0 u_i + a_1 u_{i-1} + h(b_0 f_i + b_1 f_{i-1}), \quad (\text{Voir le schema (5)})$$

donc on a:

$$a_0 = 1, a_1 = 0, b_0 = \frac{3}{2}, b_1 = \frac{-1}{2} \text{ et } b_{-1} = 0.$$

- Le schéma d'Adams-Boshforth est un schéma explicite.

Le schéma d'Adams-Moulton:

$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_{i+1} = u_i + h\left(\frac{2}{3}f_i - \frac{1}{12}f_{i-1}\right) + h\frac{5}{12}f_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (8)$$

de la forme

$$u_{i+1} = a_0 u_i + a_1 u_{i-1} + h(b_0 f_i + b_1 f_{i-1}) + b_{-1} f_{i+1},$$

donc on a:

$$a_0 = 1, a_1 = 0, b_0 = \frac{2}{3}, b_1 = \frac{-1}{12} \text{ et } b_{-1} = \frac{5}{12}.$$

- Le schéma d'Adams-Moulton est un schéma implicite.

En résumé:

- Si on utilise la méthode d'Adams-Boshforth, on prend $a = [1 \ 0]$, $b = [3/2 \ -1/2]$, e='expl'.
- Si on utilise la méthode d'Adams-Moulton, on prend $a = [1 \ 0]$, $bb = [2/3 \ -1/12 \ 5/12]$, e='impl'.

Le script err_adams.m (Voir figure 4)

```
f=@(t,y)(1-y.^2);
% la solution exacte est :
y=@(t)(exp(2*t)-1)./(exp(2*t)+1);
% les coefficients des deux methodes :
a=[1 0];
bb=[2/3 -1/12 5/12];
b=[3/2 -1/2];
y0=0;
tspan=[0 1];
h=(tspan(2)-tspan(1))./(2.^(1:10))
for i=1:10;
[t,u]=adams(a,b,f,y0,tspan,2^i,'expl');
[t,uu]=adams(a,bb,f,y0,tspan,2^i,'impl');
% l'erreur en t=1 (derniere valeur dans [0 1]),
par les deux methodes
er1(i)=abs(u(end)-y(1));
er2(i)=abs(uu(end)-y(1));
end
loglog(h,er1(1:end),'r')
hold on
loglog(h,er2(1:end))
```

On remarque que la méthode d'Adams-Moulton est plus précise.

- Écrire un script qui renvoi l'ordre de convergence des deux méthodes.

Rappel:

Pour calculer l'ordre de convergence p , on utilise la formule suivante

$$p \simeq \frac{\log\left(\frac{er_{i-1}}{er_i}\right)}{\log 2}, \quad i = 2, \dots, N. \quad (9)$$

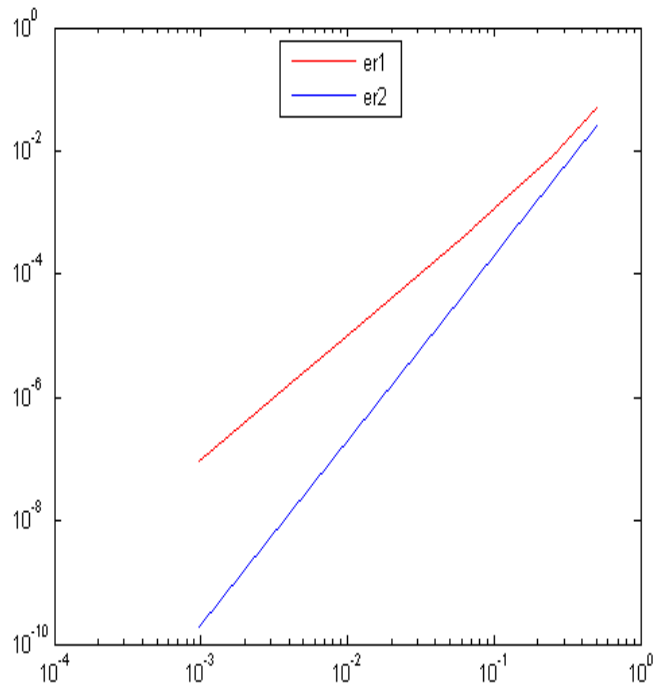


Figura 4: L'erreur pour $n=10$, en utilisant la méthode d'Adams-Boshfort "er1" et la méthode d'Adams-Moulton "er2"

Explication:

on suppose que $\begin{cases} er_i = Ch_i^p \\ er_{i-1} = Ch_{i-1}^p \end{cases}$ à chaque étape i , C est une constante qui ne dépend pas de i .

$$\frac{er_i}{er_{i-1}} = \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^p$$

$$\log \left(\frac{er_i}{er_{i-1}} \right) = p \log \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right),$$

on aura

$$p \simeq \frac{\log \left(\frac{er_i}{er_{i-1}} \right)}{\log \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right)}.$$

Pour estimer la valeur de $\frac{h_i}{h_{i-1}}$, on peut prendre $N = 2^i$.

Donc, $\frac{h_i}{h_{i-1}} = \frac{1}{2}$, ce qui nous donne la formule (9).

Pour écrire le script qui renvoi l'ordre de convergence, on va utiliser le script err_adams.m en ajoutant juste le calcul de p_1 et p_2 , avec p_1 est l'ordre de convergence de la méthode d'Adams-Boshforth et p_2 est l'ordre de convergence de la méthode d'Adams-Moulton.

```
f=@(t,y)(1-y.^2);
% la solution exacte est :
y=@(t)(exp(2*t)-1)./(exp(2*t)+1);
% les coefficients des deux methodes :
a=[1 0];
```

```

bb=[2/3 -1/12 5/12];
b=[3/2 -1/2];
y0=0;
tspan=[0 1];
h=(tspan(2)-tspan(1))./(2.^(1:10))
for i=1:10;
[t,u]=adams(a,b,f,y0,tspan,2^i,'expl');
[t,uu]=adams(a,bb,f,y0,tspan,2^i,'impl');
% 1 erreur en t=1 (derniere valeur dans [0 1]),
par les deux methodes
er1(i)=abs(u(end)-y(1));
er2(i)=abs(uu(end)-y(1));
end
p1=log(er1(1:end-1)./er1(2:end))/log(2)
p2=log(er2(1:end-1)./er2(2:end))/log(2)

```

Après execution, on aura
p1 =

Columns 1 through 8

2.6786 2.1288 2.0974 2.0591 2.0324 2.0169 2.0087 2.0044

Column 9

2.0022

p2 =

Columns 1 through 8

3.0214 3.0106 3.0053 3.0026 3.0013 3.0006 3.0003 3.0002

Column 9

3.0001

- La méthode d'Adams-Boshforth est d'ordre 2.
- La méthode d'Adams-Moulton est d'ordre 3.