TP $N^0 2$: Approximation des EDO avec Matlab

Dans toute la suite le problème de Cauchy modèle sera le suivant

$$\begin{cases} y'(t) = fun(t, y(t)), \quad t \in (t_0, T] \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

`tspan` désignera toujours le vecteur (t_0, T).

TP1 *(Analyse de la convergence de la méthode d'Euler)*
Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \cos 2y(t), \quad 0 < t \leq 1 \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

— Vérifier que l'unique solution du problème (2) est donnée par $y(t) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\dfrac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + 1}\right)$.
— Écrire un script Matlab `u=euler(fun,tspan,n,y0,e)` qui renvoie la solution approchée u du problème (1) par le schéma explicite lorsque `e='expl'` et par le schéma implicite lorsque `e='impl'` .
— Tracer dans le même repère les solutions approchées par les deux schémas ainsi que la solution exacte pour $n = 10$.
— Tracer dans le même repère l'erreur en $t = 1$ par les deux schéma pour n variant de 10 à 20 et en déduire que l'erreur est une fonction linéaire du pas h.

TP2 *(Méthodes d'Adams)*
— Écrire un script `adams(a,b,fun,y0,tspan,n,e)` qui renvoi la solution approchée u du problème de Cauchy (1) par la méthode multi-pas suivante (vue en cours)

$$u_{i+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j u_{i-j} + h \sum_{j=0}^{p} b_j f_{i-j} + h b_{-1} f_{i+1}, \quad p \leq i \leq n-1,$$

où $a = (a_0, \ldots, a_p)$, $b = (b_0, \ldots, b_p, b_{-1})$ et `e='expl'` si la méthode est explicite et `e='impl'` si elle est implicite (On utilisera le schéma d'Euler explicite comme schéma d'amorçage).
Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = 1 - y^2, \quad t \in (0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

— Montrer que la solution exacte est donnée par $y(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.
— Tracer l'erreur ϵ_i en fonction des noeuds t_i pour $n = 10$ puis pour $n = 20$ en utilisant la méthode d'Adams-Bashforth puis celle d'Adams-Moulton à 2 pas. Comparer les deux méthodes.
— Écrire un script qui renvoi l'ordre de convergence des deux méthodes. Conclusion.

[0] Toutes les séries de TP peuvent être téléchargées depuis la page web de l'auteur: https://sites.google.com/site/kouchetpmatlab