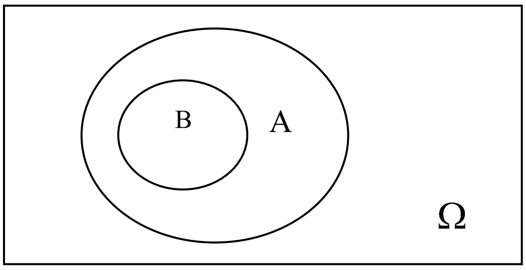
Chapitre .V : Notions de probabilité conditionnelle

V.1. Définitions :

- On appelle population statistique un ensemble Ω constitué de N éléments appelés unités statistiques (u.s) ou individus N est appelé nombre de cas possibles.
- On appelle événement un sous ensemble de la population Ω, le nombre de N_A d'u.s appartenant à un événement A appelé « nombre de cas favorables ».
- On appelle probabilité de l'événement A le rapport suivant :
  Le nombre de cas favorables (N_A) / Le nombre de cas possibles (N)

V.2. Relations et opérations :

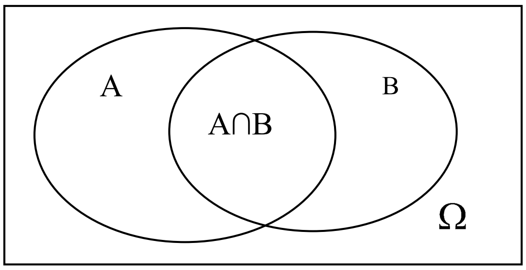
- A et B deux sous ensembles de Ω



B est inclus dans A : $B \subset A \leftrightarrow x \in B \rightarrow x \in A$

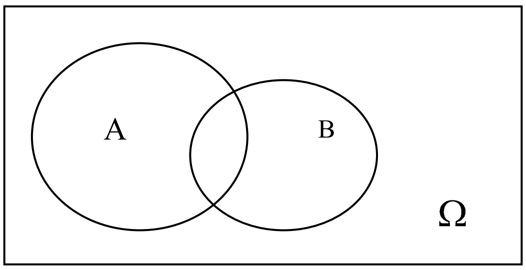
La réalisation de B entraine la réalisation de A

- L'ensemble A inter B noté $A \cap B$ est constitué des éléments qui appartiennent à la fois A et B.



$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$

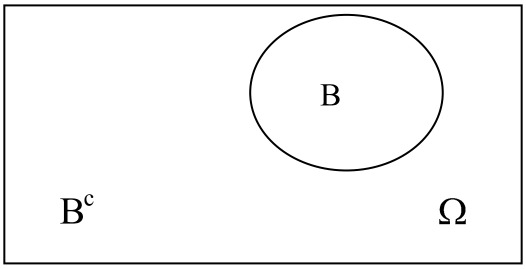
- L'ensemble A union B noté AUB est constitué des éléments de A et B.



$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

On a aussi : $A \cap B \subset A \cup B$

- Les sous ensemble complémentaire d'un sous ensemble B est définie par le sous ensemble B^c tel que : $B \cup B^c = \Omega$, $B \cap B^c = \phi$



$x \in B^c \leftrightarrow x \notin B$

V.3. Propriétés des probabilités

V.3.1. Tirage avec et sans remise :

- L'unité statistique peut être remise dans la population et être éventuellement retiré : le tirage est dit indépendant. Puisqu'il n'exerce aucune influence sur les tirages suivants.
- Inversement, si l'u.s n'est pas remise, les nombres N_A et N sont diminuées de 1 : après le 1er tirage, la probabilité: $(N_A-1) / (N-1)$ est n'est plus la même : les tirages sont « dépendants » ou « sans remise ».

V.3.2. Les propriétés :

- La probabilité est un nombre compris entre 0 et 1 :

$$\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$$

C'est évidant, le nombre de cas favorables étant toujours positif ou nul ou inferieur ou égal au nombre de cas possibles.

- La probabilité de population (Ω) est égal à 1, et celle de l'ensemble vide Φ égale à 0 :
-

$$\mathbf{P(\Omega) = 1, P(\Phi) = 0}$$

Lorsque l'événement est la populationΩ, les cas favorables sont les cas possibles. Est lorsque c'est l'ensemble vide le nombre de cas favorables est nul.

- La probabilité de l'événement complémentaire est égale à :
-

$$\mathbf{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

Les éléments de A^c sont ceux qui n'appartiennent pas à A, donc : $N-N_A$.

- La probabilité de l'union de deux événements est donnée par :
-

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Les éléments de AUB sont les éléments de A et de B. on compte deux fois les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B, c.à.d. $A \cap B$, il est donc nécessaire de faire la soustraction.

- Si un sous-ensemble B est inclus dans un sous- ensemble A, la probabilité P(B) est inférieure ou égale à la P(A).

$$\mathbf{B \subset A \rightarrow P(B) \leq P(A)}$$

V.4. Probabilité conditionnelle et indépendance:

V.4.1. Probabilité conditionnelle

La probabilité conditionnelle d'un événement A pour un événement B, fixé de probabilité non nulle est définie come :

$$\mathbf{P_B(A)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

V.4.2. L'indépendance :

On dit que deux événements A et B sont indépendants quand la réalisation de l'un ne modifié pas la probabilité de l'autre.

On dit aussi que la probabilité de l'événement $A \cap B$ est égale au produit des probabilités :

$$\mathbf{P\ (A \cap B)=P(A).P(B)}$$

V.4.3. La probabilité totale :

D'une manière générale la formule de probabilité totale est :

$$\mathbf{P\ (A) = P\ (A \cap B) + P\ (A \cap B^c)}$$

Ou bien :

$$\mathbf{P\ (A)=P_B(A).P(B)+P_{B^c}(A).P(B^c)}$$

V.4.4. Formule de Bayes :

Soit A un événement de Ω on considère un événement B est son complémentaire B^c, on a :

$$\mathbf{P_A(B) = \frac{P\ (B \cap A)}{P\ (A)} = \frac{P_B(A)\ P(B)}{P_B(A)P(B) + P_{B^C}(A)P\ (B^C)}}$$