Solution TD 1 relatif au Chapitre 2 cours 1 et 2

Nom du fichier : TD 2_2

Exercice 01:

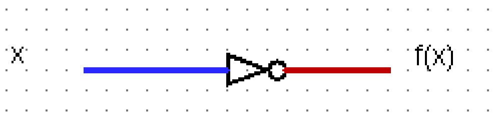
Montrerons que l'on peut réaliser :

a) d'une porte NOT en n'utilisant que des portes NAND.

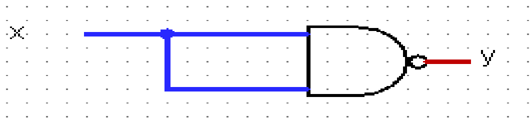
Sachant que l'operateur NOT dont la TdV est la suivante, inverse la variable à son entrée.

x	F(x)= $\overline{x}$
0	1
1	0

x	y= $\overline{x.x}$
0	1
1	0



=

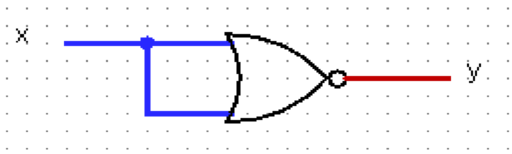


Porte NOT Porte NAND

Lorsqu'une une porte NAND voit à son entrée la même variable x, sa sortie y prend la forme $y = \overline{x.x}$, or on sait que $x.x = x$ d'où $\boldsymbol{y} = \overline{x.x} = \overline{\boldsymbol{x}}$. Donc avec l'operateur NAND, on peut retrouver l'opération NOT, à condition d'alimenter le NAND avec une même et unique entrée.

b) d'une porte NOT en n'utilisant que des portes NOR

x	y= $\overline{x+x}$
0	1
1	0



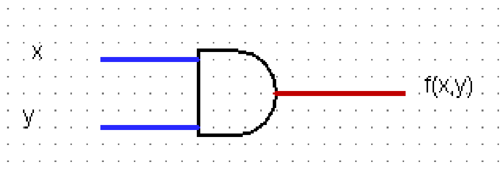
Porte NAND

Lorsqu'une une porte NOR voit à son entrée la même variable x, sa sortie y prend la forme $y = \overline{x+x}$, or on sait que $x + x = x$ d'où $\boldsymbol{y} = \overline{x+x} = \overline{\boldsymbol{x}}$. Donc avec l'operateur NOR, on peut retrouver l'opération NOT, à condition d'alimenter le NOR avec une même et unique entrée

c) d'une porte AND en n'utilisant que des portes NOR et NOT

x	y	F(x,y)=x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

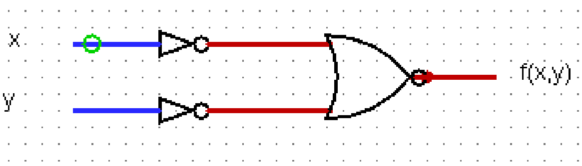
Porte AND



Inversons la fonction $f(x,y)\ deux\ fois\ pour\ ne\ pas\ modifier\ son\ etat\ initial$ et appliquant le théorème de De Morgan $f(x,y) = \overline{\overline{x.y}} = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} + \bar{y}$	$\overline{\bar{x} + \bar{y}}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1

Porte AND

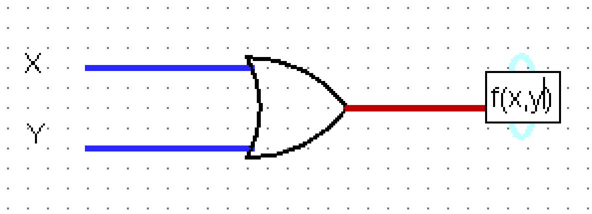


On voit bien que la dernière colonne du tableau ci-dessus correspond à l'état de sortie de la porte AND. Le logigramme équivalent est dessiné à droite du même tableau.

d) d'une porte OR en n'utilisant que des portes NAND et NOT

x	y	F(x,y)=x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

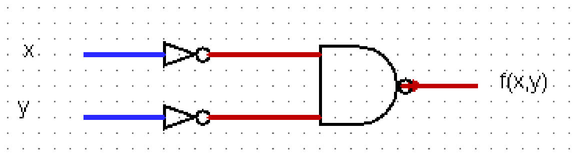
Porte OR



Inversons la fonction $f(x,y)\ deux\ fois\ pour\ ne\ pas\ modifier\ son\ etat\ initial$ et appliquant le théorème de De Morgan $f(x,y) = \overline{\overline{x + y}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}}$.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}.\bar{y}$	$\overline{\bar{x}.\bar{y}}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Porte OR

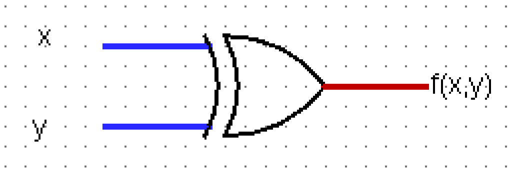


On voit bien que la dernière colonne du tableau ci-dessus correspond à l'état de sortie de la porte OR. Le logigramme équivalent est dessiné à droite du même tableau.

e) d'une porte XOR sous sa forme directe ensuite en n'utilisant que des portes NAND.

x	y	F(x,y)=x⊕y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Porte XOR

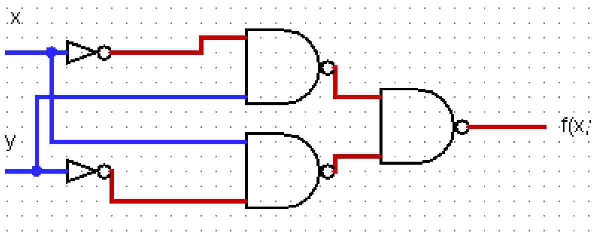


Sachant l'expression analytique du XOR est $f(x,y) = x\oplus y = x.\bar{y} + \bar{x}.y$. Si on inverse deux cette expression et on applique le théorème de De Morgan sur la première inversion :

$f(x,y) = x\oplus y = \overline{\overline{x.\bar{y} + \bar{x}.y}} = \overline{\overline{x.\bar{y}}.\overline{\bar{x}.y}}$.

x	y	$\bar{x}.y$	$x.\bar{y}$	$\overline{\bar{x}.y}$	$\overline{x.\bar{y}}$	$\overline{\overline{x.\bar{y}}.\overline{\bar{x}.y}}$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0

Porte XO



R

Exercice 02 :

Vérifier s'il y a réellement égalité entre les expressions suivantes :

1. $a(b+c) = a.b + a.c \neq a.b$ *Rep. Non*
2. Développons $(a+b).(a+c) = a.a + a.c + b.a + b.c$

Comme a.a=a ; alors $a.a + a.c + b.a + b.c = a.(1+b+c) + b.c$

et comme $1 + b + c = 1,\ \forall b \text{ et } \forall c$ alors $a.(1+b+c) + b.c = a + b.c$
Rep. Oui

3. En appliquant les théorèmes de De Morgan a $\overline{\bar{a}.(b+\bar{c})} = \bar{\bar{a}} + \overline{b+\bar{c}} = a + \bar{b}.\bar{\bar{c}} =$ $a + \bar{b}.c$ *Rep. Oui*
4. $a.(\bar{a}+b) = a.\bar{a} + a.b$, comme $a.\bar{a} = 0,\ \forall x$ alors, $a.(\bar{a}+b) \neq a+b$ *Rep. Non*

Exercice 03 :

En appliquant les propriétés de l'algèbre de Boole, vérifions les égalités suivantes :

1. developpons l'expression suivante : $(a+b).(a+c).(b+c) = (a+b)(a.b + a.c + b.c + c.c) = (a+b)(a.b + a.c + b.c + c) = (a+b)\big(a.b + c(a+b+1)\big) =$

$(a + b)(a.b + c) = (a.a.b + a.c + b.a.b + b.c) = a.b + a.c + a.b + b.c =$
$a.b + a.c + b.c.$ car d'après les propriétés de l'algèbre de Boole, a.a=1 et b.b=1

2. developpons l'expression suivante : $(a + \bar{b} + a.\bar{b}).(a.b + \bar{a}.c + b.c) = \cancelto{a.b}{a.a.b} + \cancelto{0}{a.\bar{a}.c} + a.b.c + \cancelto{0}{\bar{b}.a.b} + \bar{b}.\bar{a}.c + \cancelto{0}{\bar{b}.b.c} + \cancelto{0}{a.\bar{b}.a.b} + \cancelto{0}{a.\bar{b}.\bar{a}.c} + \cancelto{0}{a.\bar{b}.b.c} = a.b + a.b.c + \bar{a}.\bar{b}.c = a.b.(\cancel{1 + c}) + \bar{a}.\bar{b}.c = a.b + \bar{a}.\bar{b}.c$

<u>Exercice 04 :</u>

1. Exprimons la fonction f sous sa *1ere forme* canonique :

$f(x,y,z) = \bar{x}.y + x.\bar{y} = \bar{x}.y.1 + x.\bar{y}.1 = \bar{x}.y.\cancelto{=1}{(z + \bar{z})} + x.\bar{y}.\cancelto{=1}{(z + \bar{z})}$
$= \mathbf{\bar{x}.y.z} + \mathbf{\bar{x}.y.\bar{z}} + \mathbf{x.\bar{y}.z} + \mathbf{x.\bar{y}.\bar{z}}$

Traçons sa TdV :

x	y	z	f(x, y, z)	$\overline{f(x,y,z)}$
0	0	0	**0**	**1**
0	0	1	**0**	**1**
0	1	0	**1**	0
0	1	1	**1**	0
1	0	0	**1**	0
1	0	1	**1**	0
1	1	0	**0**	**1**
1	1	1	**0**	**1**

Sachant que $\overline{f(x,y,z)} = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.z + x.y.\bar{z} + x.y.z$ alors :

$f(x,y,z) = \overline{\overline{f(x,y,z)}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.z + x.y.\bar{z} + x.y.z}$. En lui appliquant le théorème de De Morgan, on aboutit à *la deuxième forme* canonique de f:

$f(x,y,z) = (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}).(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \bar{\mathbf{z}}).(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z}).(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{z}})$.

-partons de la *1ere forme* :

$f(x,y,z) = \bar{x}.y.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z}$, si on inverse cette fonction 2 fois et en lui appliquant le théorème on aboutit à la *3ieme forme* canonique :

$\mathrm{f(x,y,z)} = \overline{\overline{\bar{x}.y.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z}}} = \overline{\overline{\bar{x}.y.z}\,.\,\overline{\bar{x}.y.\bar{z}}.\,\overline{x.\bar{y}.z}.\overline{x.\bar{y}.\bar{z}}}$

-partons de la *2eme forme* :

$\mathrm{f(x,y,z)} = (x+y+z).(x+y+\bar{z}).(\bar{x}+\bar{y}+z).(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$, si on inverse cette fonction 2 fois et en lui appliquant le théorème on aboutit à la *4^{ieme} forme* canonique :

$\mathrm{f(x,y,z)} = \overline{\overline{(x+y+z).(x+y+\bar{z}).(\bar{x}+\bar{y}+z).(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}}$

$\mathrm{f(x,y,z)} = \overline{(\overline{x+y+z}).(\overline{x+y+\bar{z}}).(\overline{\bar{x}+\bar{y}+z}).(\overline{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}})}$

2. Exprimons la fonction g sous sa 2eme forme canonique

$$\mathrm{g(a,b,c)} = (a+b).(a+c) = (a+b+\underbrace{c.\bar{c}}_{=0}).\big(a+\underbrace{b.\bar{b}}_{=0}+c\big)$$

$$= (a+b+c).(a+b+\bar{c}).(a+b+c).\big(a+\bar{b}+c\big)$$

$$= (\boldsymbol{a+b+c}).(\boldsymbol{a+b+\bar{c}}).\big(\boldsymbol{a+\bar{b}+c}\big)$$

Dressons sa TdV.

a	b	c	g(a, b, c)
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Réécrivons g(a,b,c) en première forme , c-a-d, en regardant les 1 de sa TdV.

$$\mathrm{g(a,b,c)} = \mathbf{\bar{a}.b.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c}$$

Cinq **'1 '** correspondants a cinq termes dans l'expression de la fonction.

Partons de la 1^{ere} forme de g(a,b,c), en déduit la troisième forme :

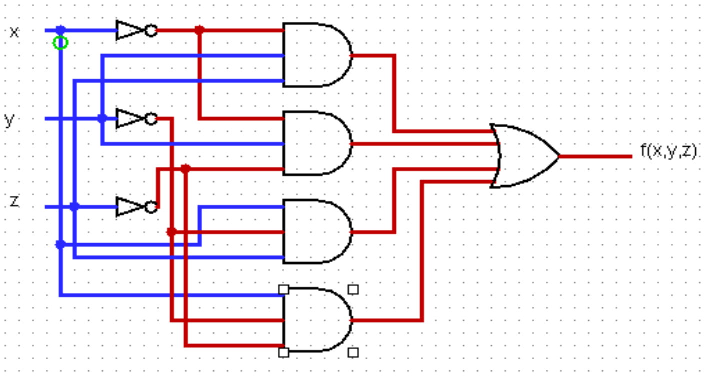
$$\mathrm{g(a,b,c)} = \overline{\overline{\mathbf{\bar{a}.b.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c}}} = \overline{\overline{\mathbf{\bar{a}.b.c}}.\overline{\mathbf{a.\bar{b}.\bar{c}}}.\overline{\mathbf{a.\bar{b}.c}}.\overline{\mathbf{a.b.\bar{c}}}.\overline{\mathbf{a.b.c}}}$$

Partons de la 2eme forme de g(a,b,c), en déduit la 4eme forme :

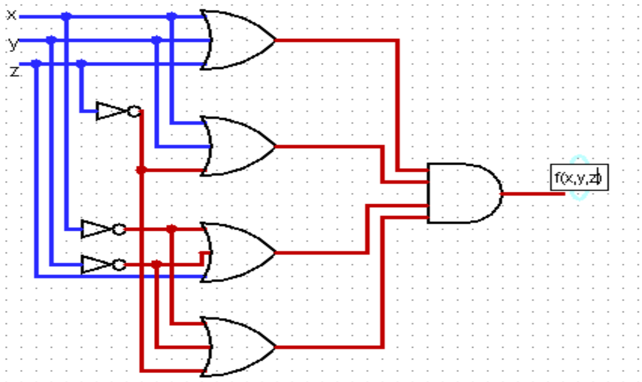
$$g(a,b,c) = (\boldsymbol{a+b+c}).(\boldsymbol{a+b+\bar{c}}).\big(\boldsymbol{a+\bar{b}+c}\big)$$

$$= \overline{(\overline{\boldsymbol{a+b+c}}) + (\overline{\boldsymbol{a+b+\bar{c}}}) + (\overline{\boldsymbol{a+\bar{b}+c}})}$$

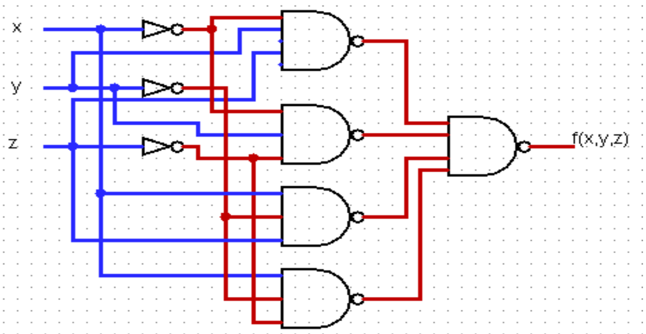
Les logigrammes des 4 formes de f(x,y,z) :



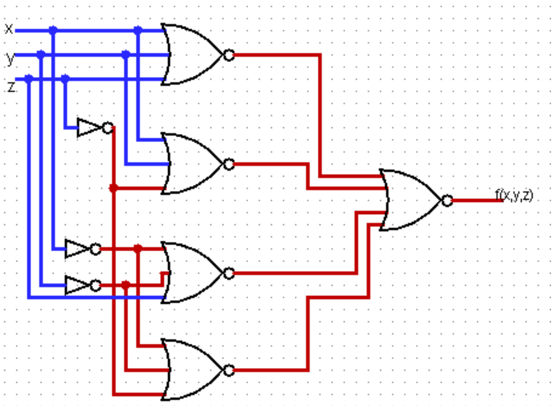
1ère forme de f(x,y,z)



2ème forme de f(x,y,z)



3ème forme de f(x,y,z)



4ème forme de f(x,y,z)