I. Convolution des Signaux

Exercice 4.1 Convolution Soit le signal échelon unité $f(t) = E_0.u(t)$ d'amplitude E_0 , représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de $f(t)$ par lui-même (auto-convolution).

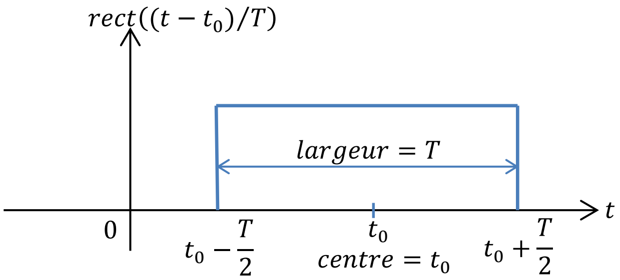
Exercice 4.2 Calculer l'intégrale de convolution des deux signaux suivants :

$$f(t) = e^{3t}u(t) \text{ et } g(t) = e^{7t}u(t),\quad u(t)\text{: un échelon unité}$$

Exercice 4.3 Trouver l'intégrale de convolution des signaux causaux $\frac{1}{\sqrt{t}}$ *et* t^2 et calculer cette intégrale pour $t = 4$.

Exercice 4.4 On définit la fonction porte par : $rect(t/T) = \begin{cases} 1 \text{ si } & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$,

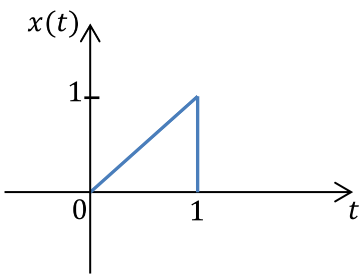
et d'une façon générale le graphe de $rect((t - centre)/largeur)$ est illustré par la figure ci-dessous,



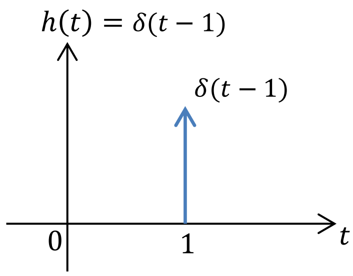
Trouver la convolution $f(t) * g(t)$ des fonctions $f(t)$ *et* $g(t)$ exprimées par :

$$f(t) = 3\, rect\left(t - \frac{1}{2}\right) + rect((t-2)/2 \text{ et } g(t) = rect(t/2),$$

Exercice 4.5 Déterminer le signal $y(t) = x(t) * h(t)$, convolution de $x(t)$ *et* $h(t)$, donnés par leurs graphes suivants :



et



❖ *Calcul de la convolution à l'aide de la transformée de Laplace*

Il est très important de savoir calculer la transformée de Laplace d'un signal pour faciliter le calcul de la convolution entre deux signaux. On rappelle que pour deux signaux $f(t)\ et\ \ g(t)$, on définit la transformée de Laplace, notée $\mathcal{L}[.]$, par:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \ \ et \ \ \mathcal{L}[g(t)] = G(p) = \int_{0}^{+\infty} g(t)e^{-pt}\,dt$$

On montre que $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(p).G(p) \ \ et \ \ que \ \ f(t) * g(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p).G(p)]$

Exercice 4.6 Sachant que $\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{p+a}$, $\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, calculer la convolution des signaux $f(t) = e^{-t}u(t) \ \ et \ \ g(t) = \sin(t)$.

II. Auto et Inter-Corrélation des Signaux Déterministes

Exercice 4.01 Soient deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$identiques à un retard et un affaiblissement près :$y(t) = a\, x(t - t_0)$. On connait l'énergie de $x(t), E_x = R_{xx}(0)$. Montrer comment peut-on déterminer l'affaiblissement a et le retard t_0 par inter-corrélation des deux signaux ?

Exercice 4.02 On se donne un signal réel$x(t)$, de fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ et de densité spectrale $S_{xx}(f)$.

On demande pour $y(t) = x(t + t_0) - x(t - t_0)$ de :

a. Calculer la fonction d'autocorrélation de $y(t)$.
b. Calculer sa densité spectrale
c. Traiter l'exemple où $x(t) = rect(t/T)$ et $t_0 = \frac{T}{2}$.

Exercice 4.03 Calculer et comparer les fonctions d'autocorrélation des deux signaux sinusoïdaux de base :

$$s_1(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \quad et \quad s_2(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

On suppose que les spectres de ces 2 signaux sont connus et tels que :

$$S_1(f) = \frac{jA}{2}[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \quad et \quad S_2(f) = \frac{A}{2}[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

Exercice 4.04 Effectuer graphiquement et analytiquement la convolution et la corrélation des 2 signaux suivants :