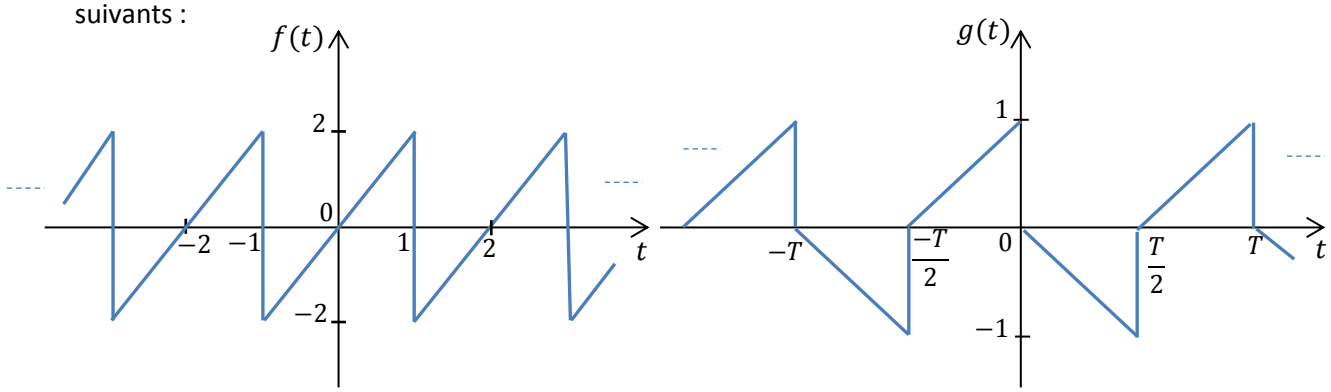
## I- Séries de Fourier des Signaux Périodiques

| **Séries de Fourier des Signaux Périodiques** | | |
|---|---|---|
| Séries de Fourier de $x(t)$ avec période $T_0$ | $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \cos(2\pi n f_0 t)$ | |
| Calcul des coefficients | $\boldsymbol{a_n} = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi n f_0 t)\, dt$ <br> $n = \mathbf{0}, 1,2, \dots \dots + \infty$ | $\boldsymbol{b_n} = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, sin(2\pi n f_0 t)\, dt$ <br> $n = \mathbf{1}, 2, \dots \dots + \infty$ |
| Séries de Fourier Complexes de $x(t)$ <br> $f_0 = \frac{1}{T_0}$ fréquence de $x(t)$ | $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{j2\pi n f_0 t} \;\rightarrow\; C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t} dt$ | |

**Exercice 2.1** Développer sous forme de série de Fourier complexe (bilatérale) le signal suivant :

$$x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

**Exercice 2.2** Calculer les coefficients de Fourier complexes pour les deux signaux périodiques suivants :




**Exercice 2.3** Soit un signal $f(t)$ de période $2\pi$ tel que :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad -\pi \le t \le 0 \\ 0 & si \quad 0 < t < \pi \end{cases}, \quad sur \;\; une \; période.$$

a. Tracer le graphe de ce signal dans l'intervalle $-2\pi \le t \le 2\pi$ .

b. Montrer que la série de Fourier de $f(t)$ dans l'intervalle $-\pi \le t \le \pi$ est égale à :

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left[\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right]$$

c. Par un choix approprié de $t$ , montrer que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

## II- Intégrale de Fourier des Signaux Non-périodiques

**Exercice 3.1** Sachant que le signal échelon unité $u(t)$ peut s'écrire sous la forme $u(t) = \frac{1}{2}\left(1 + sgn(t)\right)$

$$où\ la\ fonction\ signe\ notée\ sgn\ ,\ est\ définie\ par\ :$$

$$sgn(t) = \begin{cases} +1 & pour\ t > 0 \\ -1 & pour\ t < 0 \end{cases} = \lim_{a\to 0} e^{-a|t|}\, sgn(t) = \lim_{a\to 0} \begin{cases} e^{-at} & pour\ t > 0 \\ -e^{at} & pour\ t < 0 \end{cases}, avec\ a > 0$$

Trouver la transformée de Fourier de $u(t)$.

**Exercice 3.2** Sachant que le signal échelon unité $u(t)$ peut s'écrire sous la forme $u(t) = \frac{1}{2}\left(1 + sgn(t)\right)$

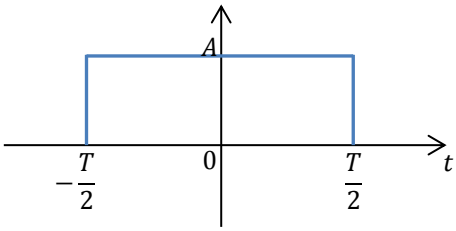
$$où\ la\ fonction\ signe\ notée\ sgn\ ,\ est\ définie\ par\ :$$

$$sgn(t) = \begin{cases} +1 & pour\ t > 0 \\ -1 & pour\ t < 0 \end{cases} = \lim_{a\to 0} e^{-a|t|}\, sgn(t) = \lim_{a\to 0} \begin{cases} e^{-at} & pour\ t > 0 \\ -e^{at} & pour\ t < 0 \end{cases}, avec\ a > 0$$

Trouver la transformée de Fourier de $u(t)$.

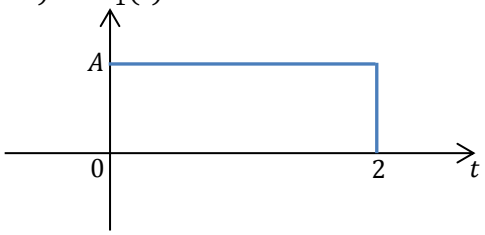
**Exercice 3.3** Trouver la transformée de Fourier des signaux suivants :

a.) $s(t) = A\, rect_T(t) = A\, rect(\frac{t}{T})$




et

$b.)$ $s_1(t)$




$$s(t) = A\, rect_T(t) = A\, rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & si\ |t| \le \frac{T}{2} \\ 0 & sinon \end{cases} ;\ fenêtre\ rectangulaire\ ou\ signal\ porte$$

$$d'ouverture\ (ou\ largeur\ )T\ et\ d'amplitude\ (ou\ hauteur)\ A$$

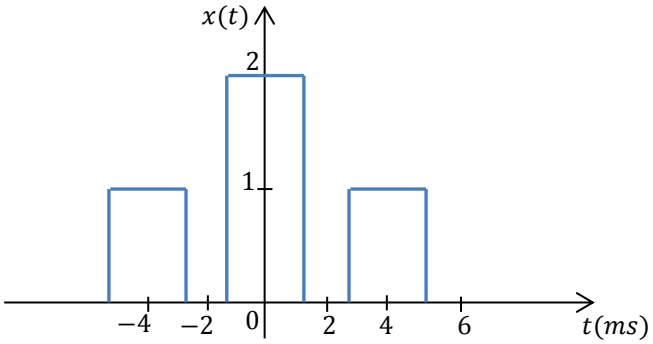
**Exercice 3.4** Tracer le graphe et trouver la TF pour le signal suivant :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & pour\ \ -1 \le t \le 0 \\ 2 & pour\ \ 0 \le t \le 1 \\ 1 & pour\ 1 \le t \le 2 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

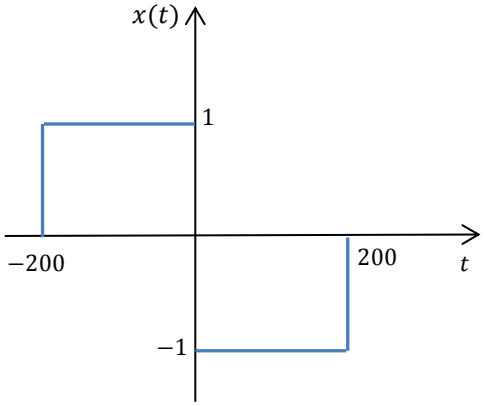
**Exercice 3.5** Trouver la transformée de Fourier du signal complexe $x(t)$ donné par :

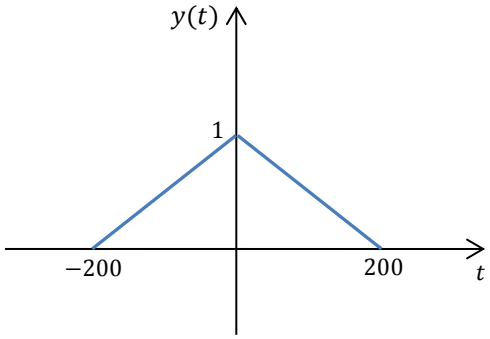
$$x(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t} & si\ \ |t| \le 1 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

**Exercice 3.6** A partir de la seule observation du signal temporel x(t) de la figure suivante, précisez ce que vaut sa densité spectrale en f=0 Hz puis calculer et tracer sa transformée de Fourier.



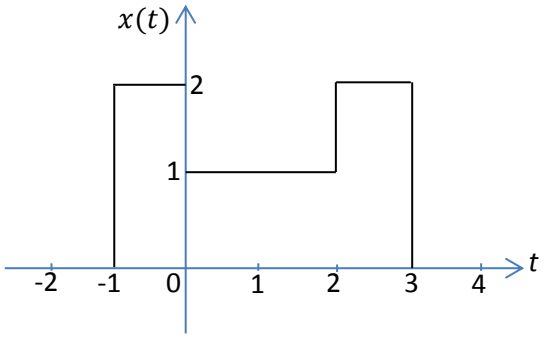

**Exercice 3.7** Partant de la transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire et de la propriété d'intégration, calculer la TF de x(t) et y(t) ci-dessous :




**Exercice 3.8** Le signal $x(t)$ est représenté par son graphe ci-dessous. On note $X(f)$ sa transformée de Fourier. Répondre aux questions suivantes sans faire de calcul explicite de $X(f)$:

a. $X(f)$ est-elle périodique ? Si oui donner sa période.
b. $X(f)$ est-elle un signal continu ou discret ?
c. Donner la valeur de $X(0)$
d. Donner $\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2 df$.



## Théorème de Parseval

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant pour $TF$ $X(f)$ et $Y(f)$ respectivement.

$$Théorème\ de\ Parseval: \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)^* df$$

$$dans\ la\ cas\ particulier\ \ y(t) = x(t)\ on\ a:$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- L'énergie est conservée dans la représentation temporelle et fréquentielle des signaux.

**Exercice 3.9** utiliser le théorème de Parseval pour calculer les intégrales suivantes:

$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)\, dt$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t)\, dt$ où $sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$, *le sinus cardinal*.

$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} sin^2(2\pi t)\, sinc^2(t)\, dt$