

I. Introduction à la Convolution

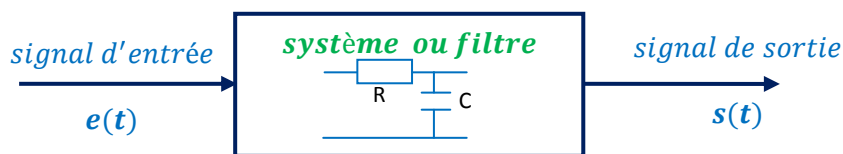
La représentation des signaux dans le domaine temporel et fréquentiel est très importante. Cependant, pouvoir analyser et étudier spécifiquement les circuits et systèmes opérant sur les signaux dans le but de réaliser et répondre à certains objectifs est aussi très important.

Le but de cette partie est développer certaines techniques de représentation et d'analyse des systèmes linéaires, nécessaire pour l'étude des systèmes de commande ou de transmission d'information.

On définit un système par un opérateur mathématique qui transforme tout signal d'entrée $e(t)$ en un signal de sortie $s(t)$.

$$\text{signal d'entrée } e(t) \xrightarrow{\text{Système}} s(t) , \text{ signal de sortie}$$

Le signal $s(t)$, appelé réponse du système de transmission est une fonction du signal d'entrée $e(t)$ et des caractéristiques du système de transmission ou de traitement.



Un système est toujours décrit par la relation entrée/sortie évoluant dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Une des méthodes d'analyse dans le domaine temporel permettant de relier tout signal de sortie (réponse du système) à un signal d'entrée (signal d'excitation du système) est basée sur la notion de **Convolution des signaux**.

Avant d'introduire la notion de convolution il est préférable tout d'abord de définir quelques propriétés des systèmes.

1.1 Définitions

- Systèmes linéaires

En considérant le signal $s_1(t)$ comme étant la réponse du système $s(t) = S[e(t)]$ à l'entrée $e_1(t)$ et le signal $s_2(t)$ en tant que sa réponse au signal d'entrée $e_2(t)$, alors on dit que le système $S[.]$ est linéaire si on a la propriété suivante :

$$a e_1(t) + b e_2(t) \xrightarrow{\text{systèmes linéaires}} a s_1(t) + b s_2(t)$$

Nota : il est important de remarquer que presque tous les systèmes sont linéaires pour des faibles signaux (première approximation). En général, tous les systèmes réels (physiques) sont globalement des systèmes non linéaires. La linéarité n'est valable qu'au voisinage d'un point de fonctionnement du système. C'est l'opération de linéarisation des systèmes pour de faibles signaux autour du point de fonctionnement choisi.

- Systèmes Invariants (stationnaires)

Un système est dit invariant dans le temps (ou stationnaire) si son comportement est indépendant de l'origine du temps, c'est-à-dire :

$$\text{si } e(t) \xrightarrow{\text{Système Invariant}} s(t) \text{ alors } e(t - \theta) \xrightarrow{\text{Système Invariant}} s(t - \theta)$$

En théorie et traitement du signal, en général on considère les filtres comme des systèmes de transmission ou traitement linéaires, continus et invariants.

1.2 Convolution des Signaux

La convolution de deux fonctions (signaux) est un concept physique très important dans plusieurs domaines de la recherche scientifique. L'intégrale ou produit de convolution, notée $*$, est définie par :

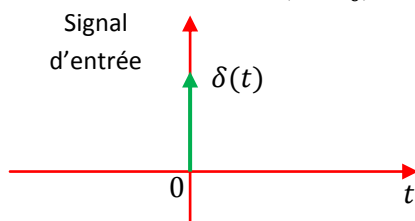
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t)$$

On appelle $h(t)$ la réponse impulsionnelle du système (ou filtre) excité par une impulsion de Dirac $\delta(t)$. la propriété d'invariance temporelle (stationnarité) du système permet de déterminer la réponse à $\delta(t - t_0)$, obtenu par translation t_0 , (t retardé de t_0), comme étant un signal $h(t - t_0)$ ayant subi la même translation ($h(t)$ retardé de t_0 aussi) :

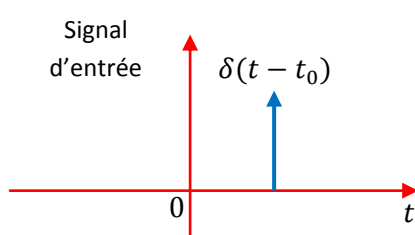
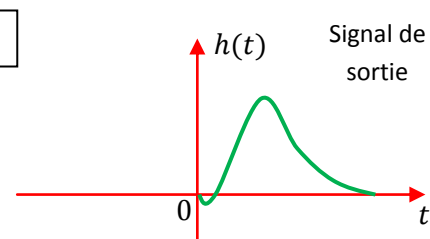
$$\text{signal } e(t) \text{ appliqué à l'entrée du système SLI: } e(t) \xrightarrow{\text{réponse du SLI}} s(t)$$

$$\text{impulsion } \delta(t) \text{ appliquée à l'entrée du système SLI: } \delta(t) \xrightarrow{\text{réponse du SLI}} h(t)$$

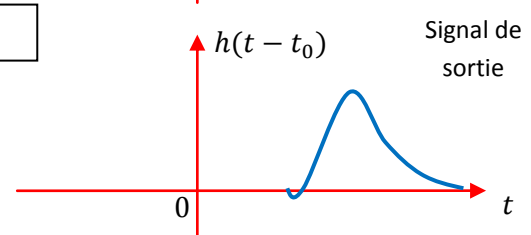
$$\text{impulsion retardée } \delta(t - t_0) \text{ à l'entrée du SLI: } \delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{réponse du SLI}} h(t - t_0)$$



Système Lin. Inv.



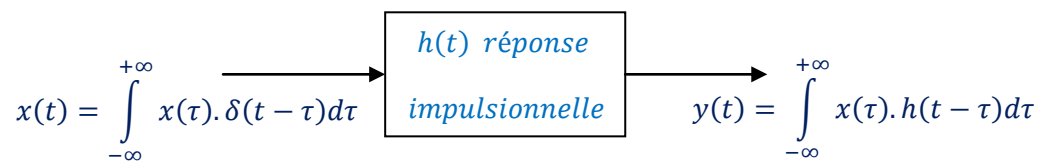
Système Lin. Inv.



En écrivant tout signal d'entrée $x(t)$ sous forme d'une fonction intégrale de l'impulsion de Dirac, Sachant que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

et dû au fait de la linéarité et de l'invariance du système, on obtient l'expression suivante pour toute sortie $y(t)$ d'un système excité par une entrée $x(t)$



$h(t - \tau)$ est la réponse du système à l'impulsion $\delta(t - \tau)$

La convolution exprime la réponse d'un système linéaire invariant (SLI) à un signal d'entrée quelconque à partir de la réponse du système au signal type de l'impulsion de Dirac, réponse impulsionnelle.

La réponse dépend donc uniquement du filtre, caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$, et de l'histoire du signal d'entrée.

1.3 Propriétés de la Convolution

Le passage d'un signal à travers d'un système linéaire invariant est équivalent à une opération de convolution entre ce signal et la réponse impulsionnelle du système. Cette convolution possède les propriétés principales suivantes :

- **Commutativité :**

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- **Associativité :**

$$[x_1(t) * h(t)] * x_2(t) = x_1(t) * [h(t) * x_2(t)]$$

- **Distributivité :**

L'opération de convolution est distributive par rapport à l'addition de deux signaux.

$$x(t) * [h(t) + k(t)] = x(t) * h(t) + x(t) * k(t)$$

- **Élément neutre de la convolution**

L'élément neutre de l'opération de convolution est le signal impulsion ou pic de Dirac

$$x(t) * \delta(t) = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Si l'un des signaux est causal (= 0 pour $t < 0$) alors l'expression de la convolution est :

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

- La convolution de signaux causaux est aussi causale

si $x(t) = 0$ et $h(t) = 0$ pour $t < 0$ alors la convolution s'écrit :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau$$

- Changement d'échelle

$$\text{si } x(t) * h(t) = y(t) \text{ alors } x(at) * h(at) = \frac{1}{|a|} y(at)$$

- Differentiation de la sortie

$$\text{si } y(t) = x(t) * h(t)$$

$$\text{alors } \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$$

ou bien

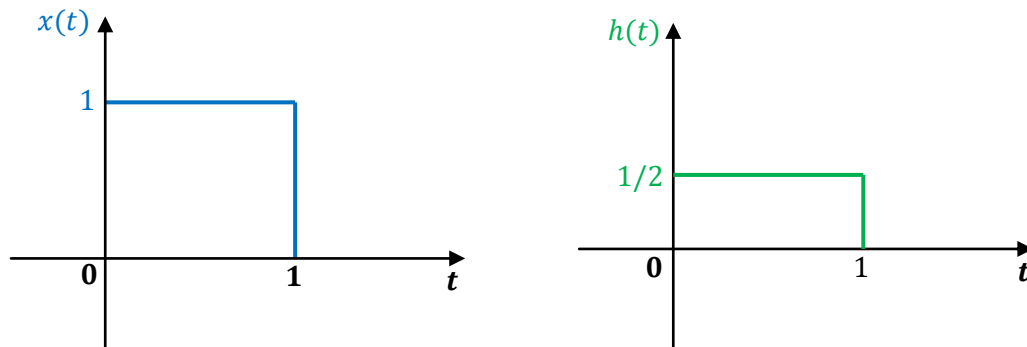
$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$



1.4 Evaluation graphique de l'intégrale de convolution

Exemple de convolution de 2 signaux portes

Soient $x(t)$ et $h(t)$ deux fonctions du temps (signaux) représentées chacune par son graphe suivant :



Pour évaluer l'intégrale de convolution de ces deux signaux on effectue les étapes suivantes en utilisant une technique graphique (convolution de 2 signaux portes) :

1. Prendre le symétrique de $h(\tau)$ par rapport à l'axe des ordonnées $\rightarrow h(-\tau)$: retournement
2. Faire glisser ou déplacer $h(-\tau)$ par une quantité t ce qui donne $h(t - \tau)$: décalage
3. Multiplier $h(t - \tau) x(\tau)$
4. Intégrer sur le support de $h(t - \tau)x(\tau)$: calculer la surface limitée par ce produit pour différentes valeurs de t

$$t \in \text{support}(x(t)) \cup \text{support}(h(t)) \text{ ou}$$

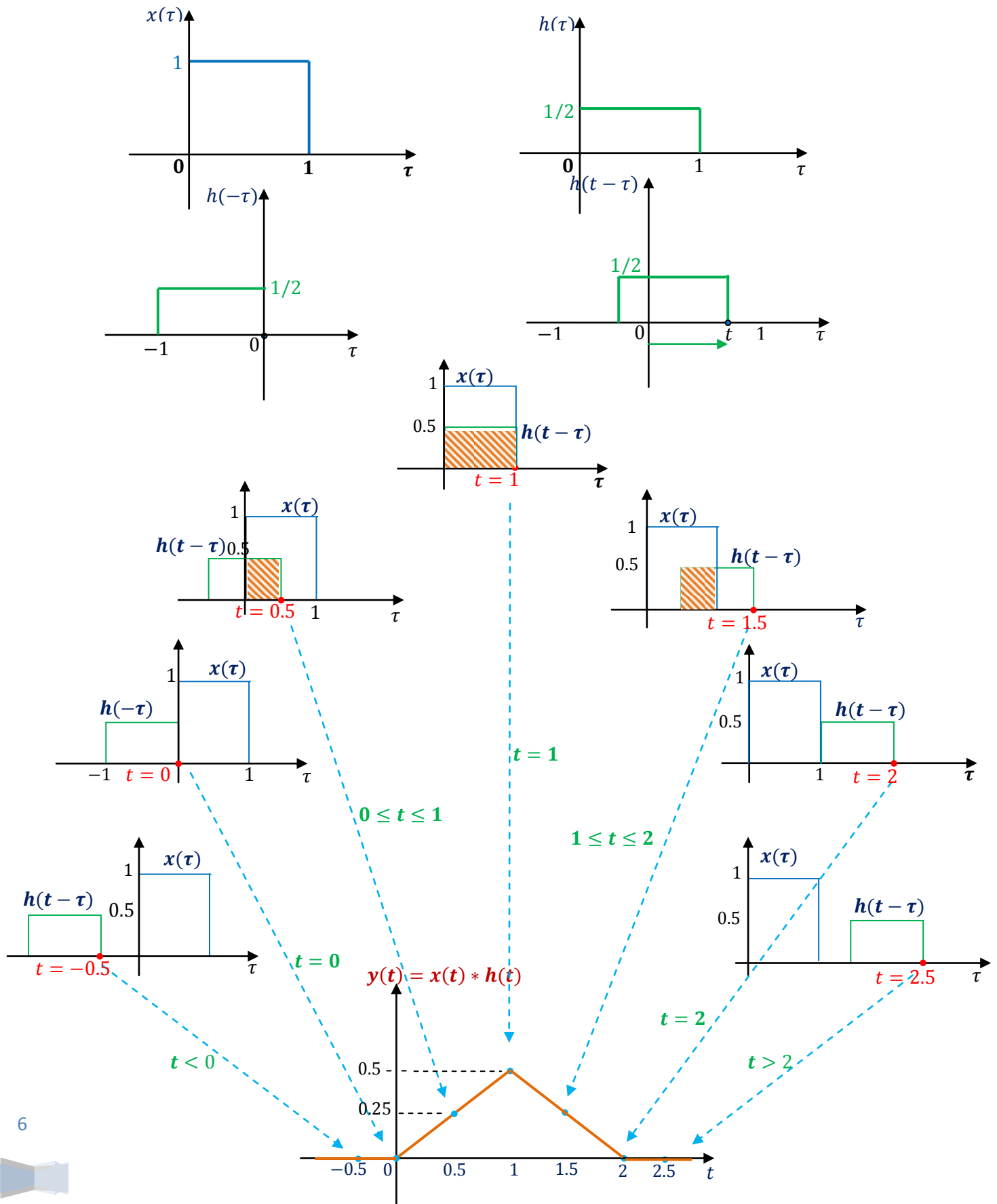
$$\sum \text{des bornes inf. de } x(t) \text{ et } h(t) \leq t \leq \sum \text{des bornes sup. de } x(t) \text{ et } h(t)$$

Dans le cas de la convolution de ces deux signaux on a : $0 + 0 \leq t \leq 1 + 1$

donc $0 \leq t \leq 2 \rightarrow \text{support de } (y(t) = x(t) * h(t))$

Voir animation sur : https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_convolution

Schémas graphiques de la convolution



1.5 Théorème de Plancherel

Le théorème de Plancherel exprime une relation très importante entre la transformée de Fourier et le produit de convolution qui s'énonce sous la forme suivante :

Théorème de Plancherel : la transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement.

$$\begin{aligned}
 &\textbf{Convolution: } x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \times H(f) \textbf{ Multiplication} \\
 &\text{et par réciproque} \\
 &\textbf{Multiplication: } x(t) \times h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) * H(f) \textbf{ Convolution}
 \end{aligned}$$

Ce théorème dit qu'une convolution temporelle est équivalente à une multiplication dans le domaine fréquentiel, et vice versa.

Démonstration :

Soient 2 signaux $x(t)$ et $h(t)$ et leurs transf. de Fourier respectives $X(f)$ et $H(f)$ tels que :

$$\begin{aligned}
 x(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \quad \text{et} \quad h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f) \\
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{et} \quad H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 \text{et soit } y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau
 \end{aligned}$$

la transformée de Fourier $Y(f)$ du signal de convolution $y(t)$ est donc:

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * h(t)] e^{-j2\pi ft} dt = \\
 Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) e^{-j2\pi ft} d\tau \right] dt
 \end{aligned}$$

en écrivant $e^{-j2\pi ft} = e^{-j2\pi f\tau} \cdot e^{-j2\pi f(t-\tau)}$ il vient que

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}] [h(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}] d\tau dt$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}] [h(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}] d\tau \right] dt$$

en posant $\theta = t - \tau$ donc $d\theta = dt$, on obtient par ce changement de variables :

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)e^{-j2\pi f(\theta)} d\theta \right] d\tau =$$

$$Y(f) = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right]}_{X(f)} \times \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)e^{-j2\pi f(\theta)} d\theta \right]}_{H(f)} =$$

d'où finalement : $Y(f) = X(f) \times H(f)$

$$Y(f) = \mathcal{TF}\{x(t) * h(t)\} = X(f).H(f)$$

Ce théorème est particulièrement important dans l'étude des filtres analogiques et le traitement du signal en général.

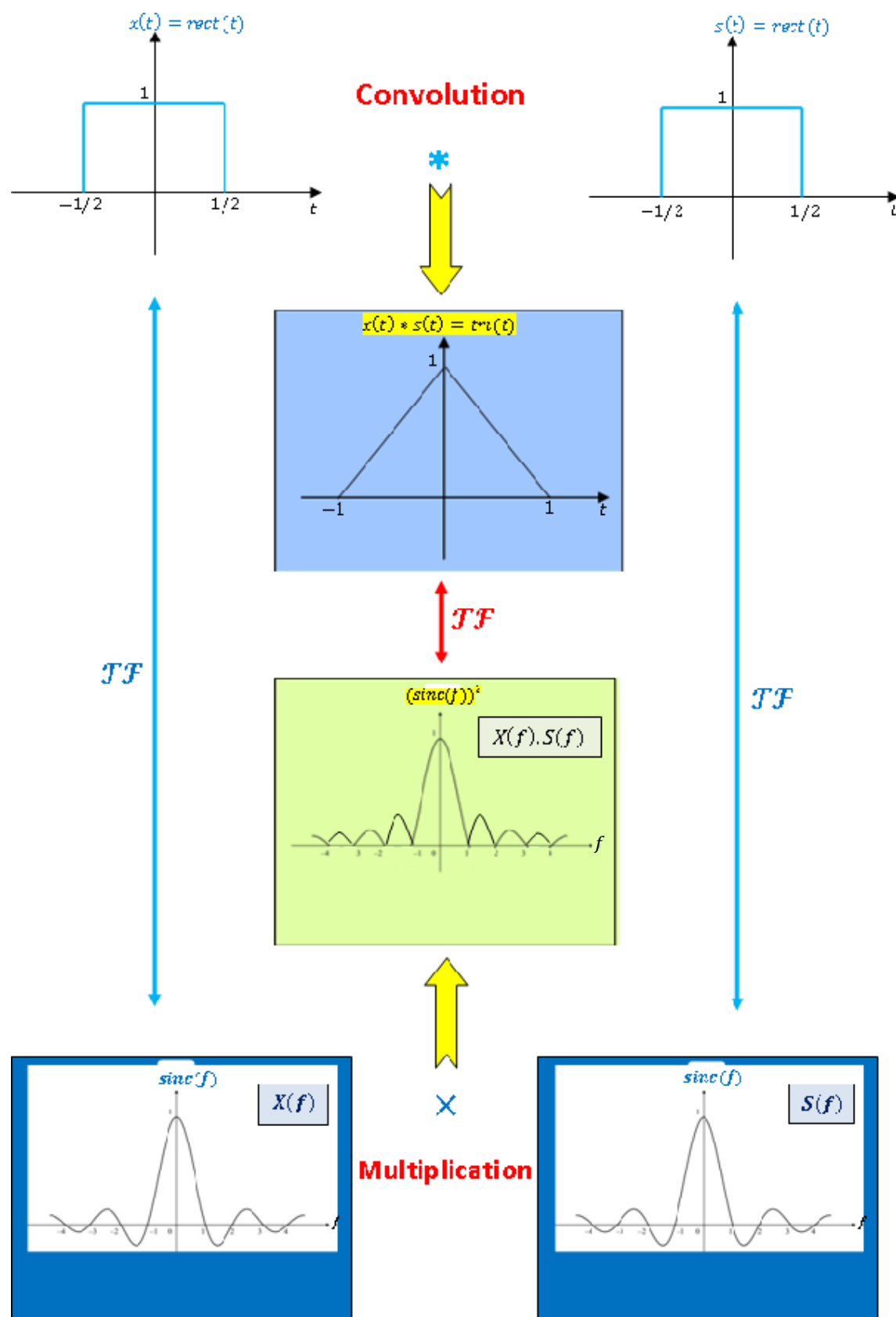
1.6 Convolution des signaux périodiques

Lorsque les deux signaux réels $x(t)$ et $s(t)$ à convoluer sont périodiques et possèdent la même période T_0 on définit alors la convolution de tels signaux de la manière suivante :

$$y(t) = x(t) * s(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau).s(t-\tau)d\tau$$



Exemple d'application du théorème de Plancherel



II. Introduction à la Notion de Corrélation

Toute transmission d'information à travers n'importe quel canal (en l'occurrence un système) est liée à une transmission d'énergie. Lorsqu'on fait une mesure sur un phénomène, le processus subit toujours un prélèvement d'énergie de la part du dispositif de mesure. Cette notion d'énergie ou de puissance d'un signal est très importante. On peut caractériser un signal selon des critères de distribution de leur énergie ou puissance dans le domaine temporel ou domaine fréquentiel. Cette caractérisation des signaux basée sur l'énergie et sur la puissance des signaux et de leurs interactions nous conduit à la notion de fonction d'Auto-corrélation et fonction d'Inter-corrélation.

Quelques applications directes de la corrélation

- Extraction ou détection d'un signal utile noyé dans un bruit par auto-corrélation. C'est une méthode complémentaire au filtrage fréquentiel.
- Mesure de distances et/ou de temps par inter-corrélation. Cette méthode est très exploitée dans le domaine des radars, sonars et autres GPS...
- L'autocorrélation peut donner une information sur des événements répétés tels que les battements musicaux ou les fréquences de pulsar en astronomie, même si cela ne peut pas donner la position dans le temps du battement.

2.1 Définitions

a.) Puissance instantanée d'un signal

La puissance à un instant t d'un signal $x(t)$ est défini par :

$$p(t) = x(t) \cdot x^*(t) = |x(t)|^2, \quad x^*(t) : \text{conjugué de } x(t).$$

Puissance moyenne, notée $p(t, T)$, sur une durée T d'un signal $x(t)$ est donnée par :

$$p(t, T) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(\tau) x^*(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Energie d'un signal $x(t)$ sur une durée T est :

$$E_x^T = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) x^*(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

On définit les signaux à énergie totale finie E_x par :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad E_x \text{ est une valeur finie}$$

On définit aussi les signaux à puissance totale finie P_x par :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad P_x \text{ est une valeur finie}$$

On peut aussi définir la puissance instantanée d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sous la forme suivante :

$$p_{xy}(t) = x(t) \cdot y^*(t) \text{ et } p_{yx}(t) = y(t) \cdot x^*(t)$$

On remarque que si les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont réels alors $p_{xy}(t) = p_{yx}(t)$.
L'énergie d'interaction entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur une durée T est :

$$E_{xy}^T = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) y^*(t) dt$$

La puissance moyenne d'interaction entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur une durée T est :

$$P_{xy}^T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) y^*(t) dt \text{ et } P_{yx}^T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) x^*(t) dt$$

si $x(t)$ et $y(t)$ sont réels alors $P_{xy}^T = P_{yx}^T$

L'énergie totale finie d'interaction entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur une durée T est :

$$E_{xy}^\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \text{ et } E_{yx}^\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) x^*(t) dt$$

La puissance moyenne d'interaction entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur une durée T est :

$$P_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y^*(t) dt \text{ et } P_{yx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t) x^*(t) dt$$

b.) Puissance fréquentielle d'un signal, Densité Spectrale

Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ possédant chacun une transformée de Fourier :

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FF}} X(f) \text{ et } y(t) \xrightarrow{\mathcal{FF}} Y(f)$$

On définit le spectre de puissance ou densité spectrale du signal $x(t)$ par :

$$S_{xx}(f) = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2$$

L'énergie contenue dans une bande de fréquences de largeur Δf autour d'une fréquence F_0 est donnée par l'expression suivante :

$$E_x(\Delta f, F_0) = \int_{F_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{F_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{xx}(f) df$$

L'énergie totale contenue dans le spectre $X(f)$ sous la forme suivante :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot X^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

On peut aussi considérer la densité spectrale d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ par les formules suivantes :

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot Y^*(f) \quad \text{et} \quad S_{yx}(f) = Y(f) \cdot X^*(f)$$

L'énergie totale d'interaction entre les deux signaux est donc obtenue par :

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df$$

$$\text{et} \quad E_{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yx}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot X^*(f) df$$

2.2 Corrélation et Densité Spectrale

a.) Fonctions de corrélation pour les signaux à énergie finie

La fonction d'auto-corrélation d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x^*(t + \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) x(\tau - t) d\tau$$

La fonction d'inter-corrélation entre les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ est donnée par :

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y^*(t + \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t) y^*(\tau) d\tau$$

Les fonctions de corrélation traduisent le degré de similitude d'un signal avec lui-même ou entre deux signaux au niveau de leur forme et leur position relative dans le temps en fonction d'un certain paramètre de translation. La corrélation implémente un processus de comparaison entre les signaux.

Dans le cas de la fonction d'auto-corrélation, ceci correspond à l'étude de ressemblance d'un processus avec lui-même au cours d'un certain temps.

Propriétés de la fonction d'autocorrélation

La fonction d'auto-corrélation $R_{xx}(t)$ possède deux propriétés très importantes, à savoir :

- La fonction d'auto-corrélation des signaux réels est paire :

$$R_{xx}(t) = R_{xx}(-t)$$

En effet, si le signal $x(t)$ est réel alors on a :

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x^*(t + \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) x(\tau - t) d\tau$$

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x(t + \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x(\tau + (-t)) d\tau = R_{xx}(-t)$$

$R_{xx}(t) = R_{xx}(-t)$ donc $R_{xx}(t)$ est paire

- La fonction d'auto-corrélation $R_{xx}(t)$ a sa valeur maximale à l'origine, c-à-d, pour $t = 0$. Cette valeur de $R_{xx}(0)$ est égale à l'énergie totale du signal $x(t)$:

$$|R_{xx}(t)| \leq R_{xx}(0) \quad \forall t \in \mathcal{R}$$

et $R_{xx}(0) = E_x$

en effet $R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x^*(t + \tau) d\tau \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x^*(\tau) d\tau = E_x$

Cette relation se comprend intuitivement par le fait que la fonction d'auto-corrélation étant une analyse de la ressemblance d'un signal avec lui-même, et le résultat de cette comparaison est maximum lorsque ne subit aucun décalage temporel ($t = 0$), c-à-d lorsqu'il est identique à lui-même.

b.) Relation avec la densité spectrale d'énergie

Considérons la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale d'un signal $x(t)$ quelconque :

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_{xx}(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f) \cdot X^*(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\}$$

$$= x(t) * x^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x^*(\tau - t) d\tau = R_{xx}(t)$$

D'où la relation importante suivante :

$$R_{xx}(t) \xrightarrow{\mathcal{FF}} S_{xx}(f)$$

$$R_{xy}(t) \xrightarrow{\mathcal{FF}} S_{xy}(f)$$

$$R_{yx}(t) \xrightarrow{\mathcal{FF}} S_{yx}(f)$$

Ainsi la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation d'un signal représente la densité spectrale de l'énergie du signal, en d'autres termes ça correspond à la distribution de l'énergie du signal sur l'axe des fréquences. C'est la distribution énergétique contenue dans le spectre du signal.

13

Souvent il est facile de calculer indirectement la fonction d'autocorrélation d'un signal ou d'intercorrélations en passant par sa densité spectrale.

Théorème de Parseval

L'énergie totale d'un signal ne dépend pas du domaine de représentation choisi. Cette quantité est invariante quel que soit cette représentation : elle est la même qu'il s'agisse d'une représentation temporelle ou fréquentielle, on a ainsi :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad ; \text{ ceci est le théorème de Parseval}$$

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df$$

et

$$E_{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yx}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot X^*(f) df$$

c.) Corrélation des signaux périodiques

Pour un signal périodique réel $x(t)$ de période T_0 , on définit la corrélation de la manière suivante :

$$R_{xx}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) x(t + \tau) d\tau$$

Sachant que tous les signaux périodiques peuvent s'exprimer sous forme d'un développement en série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi F_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi F_0 t) \quad , \quad \text{avec } F_0 = \frac{1}{T_0}$$

En appliquant la relation précédente de la corrélation on peut obtenir la fonction d'autocorrélation des signaux périodiques suivante :

$$R_{xx}(t) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos(2\pi F_0 t)$$

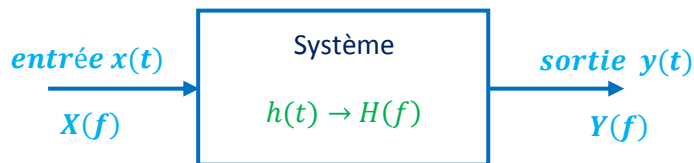
14

On peut effectivement conclure que la fonction d'autocorrélation conserve l'information de périodicité du signal (fréquence) mais elle perd l'information de phase et d'amplitude.

L'autocorrélation possède toutes les fréquences comprises dans le signal initial et uniquement ces fréquences.

2.3 Principales Relations entre la convolution et les densités spectrales

Pour un système linéaire invariant on a les propriétés suivantes qui montrent les relations entre les différentes grandeurs intervenant dans ce système, à savoir, les relation de convolution et des densités spectrales de ces grandeurs.



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$S_{yx}(f) = H(f) S_{xx}(f)$$

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f)$$

- La densité inter-spectrale d'énergie $S_{yx}(f)$ entre la sortie $y(t)$ du système et l'entrée $x(t)$ est égale au produit de la réponse fréquentielle du système $H(f)$ et la densité spectrale d'énergie de l'entrée $S_{xx}(f)$.
- La densité spectrale d'énergie $S_{yy}(f)$ de la sortie $y(t)$ est égale au produit du carré de la réponse fréquentielle $|H(f)|^2$ par la densité spectrale $S_{xx}(f)$ de l'entrée $x(t)$.

