Solution série n°3

Exercice n°1 :
Calcul de la différentielle extérieure de

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

$$d\omega = d(\omega) = d\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right) = \ d\left(\frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2dx}\right)$$

$$= d\left(\frac{x}{x^2+y^2}dy\right) - \left(\frac{y}{x^2+y^2}dx\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx\wedge dy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy\wedge dy$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx\wedge dx - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy\wedge dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx\wedge dy - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx\wedge dy$$

$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Exercice n°2 :

1- Montrons que ω n'est pas exacte

on pose : $p(x,y) = x^2+y^2+2x$, $q(x,y) = 2y$

calculons $\frac{\partial p}{\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)$

$\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = 2y$ $\quad \frac{\partial q}{\partial x}(x,y) = 0$

$\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial q}{\partial x}(x,y)$

Donc ω n'est pas exacte .

2-On a : $\varphi(x)\omega(x,y) = \varphi(x)\left(x^2+y^2+2x\right)dx + 2y\varphi(x)dy$

Posons :

$p_1(x,y) = \varphi(x)\left(x^2+y^2+2x\right)$ $\quad q_1(x,y) = 2y\varphi(x)$

calculons $\frac{\partial p_1}{\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial q_1}{\partial x}(x,y)$

$\frac{\partial p_1}{\partial y}(x,y) = 2y\varphi(x)$ (1) et $\frac{\partial q_1}{\partial x}(x,y) = 2y\varphi'(x)$ (2)

$\frac{\partial p_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial q_1}{\partial x}(x,y) \Longleftrightarrow 2y\varphi(x) = 2y\varphi'(x)$

On obtient :$\varphi(x) = Ce^x$ on choisit $C = 1$ alors $\varphi(x) = e^x$

si $df = \varphi(x)\omega(x,y)$

alors $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(x^2+y^2+2x\right)e^x$ (3)

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x$ (4)

de l'équation (4) on obtient : $f(x,y) = y^2e^x + C(x)$

$(3) \Longrightarrow y^2e^x + C'(x) = \left(x^2+y^2+2x\right)e^x$

par intégration on obtient : $C(x) = x^2e^x + k$ finalement :

$f(x,y) = y^2e^x + C(x) = \left(x^2+y^2\right)e^x + k$

Exercice n°3 :

$\omega(x,y) = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$

1- Si on pose $p(x,y) = \frac{2x}{y}$ et $q(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}$

$\omega(x,y)$ est fermée $\Longleftrightarrow \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial q}{\partial x}(x,y)$

$\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial q}{\partial x}(x,y)$

Donc $\omega(x,y)$ est fermée

2- a- ω est fermée ; U est étoilé ?

d'apres Poincaré ω est exacte

b- On peut aussi prouver que ω est exacte en calculant ses primitives

ω est exacte $\Longleftrightarrow$ $\exists\, f$ une fonction tel que $df = \omega$

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}$ (1)

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$ (2)

l'équation (1) $\Longrightarrow$ $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2} + H(y)$

l'équation (2) $\Longrightarrow -\frac{x^2}{y^2} = -\frac{x^2}{y^2} + H'(y) \Longrightarrow H'(y) = 0$

donc $H(y) = C$ alors $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2} + C$

Exercice n°4 :

a- $\omega(x,y) = 3x^2ydx + \left(x^3 - \sin y\right)dy$

$p(x,y) = 3x^2y$ et $q(x,y) = 3x^2$

$\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = 2x^2 = \frac{\partial q}{\partial x}(x,y)$

donc ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$

d'après Poincaré ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$

alors $\omega(x,y) = d\ f(x,y) \Longleftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3xy^2$ (1) $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - \sin y$ (2)

l'équation (1) $\Longrightarrow$ $f(x,y) = x^3y + \varphi(y)$

l'équation (2) $\Longrightarrow x^3 - \sin y = x^3 + \varphi'(y) \Longrightarrow \varphi(y) = \cos y + C$

Finalement les primitives de ω sont les fonctions

$f(x,y) = xy + \cos y + C$

b- L'équation différentielle $3x^2y + \left(x^3 - \sin y\right)y' = 0$

correspond à $\omega(x,y) = df(x,y) = 0$

dont la solution est : $x^3y + \cos y = K$ $K \in \mathbb{R}$