

Cours de géométrie différentielle ,Chapitre2

Zoubida Souici Benhammadi
Master1 systèmes dynamiques,UBMA

April 8, 2020

-Plan:

Chapitre2:Champ de vecteurs

§1:Fibré tangent

§2:Champs de vecteurs

§3:Courbes intégrales d'un champ de vecteurs.

§4:Flots de champ de vecteurs

1 Fibré tangent.

1.1 Coordonnées locales et base de l'espace tangent

Soit M une variété différentielle de classe C^p et de dimension n

Definition 1 On appelle coordonnées locales associées à une carte $C = (U, \varphi)$ de M , les n fonctions réelles $\varphi_1 = pr_1 \circ \varphi, \dots, \varphi_n = pr_n \circ \varphi$

soit $x \in M$ et soit $T_x M$ l'espace tangent à M en x

$\dim T_x M = \dim M = n$

Soit $C = (U, \varphi)$ une carte de M en x

Definition 2 Une base de l'espace vectoriel tangent $T_x M$ est donnée par les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ où $x_i = pr_i \circ \varphi$ ($i = 1, \dots, n$) sont les coordonnées locales associées à la carte $C = (U, \varphi)$

Remark 3 Soit $\xi \in T_x M$ alors $\xi = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ où $a_i \in \mathbb{R}$

1.2 Fibré tangent

Soit M une variété différentielle de classe C^p et de dimension n

Soit l'ensemble $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$

On définit l'application pied notée $p : TM \rightarrow M$ par:

$$p(\xi) = x \Leftrightarrow \xi \in T_x M$$

Theorem 4 (i) Pour toute carte $C = (U, \varphi, n)$ de M , le triple $C' = (U', \varphi', 2n)$ est une carte de l'ensemble TM où $U' = p^{-1}(U)$ et $\varphi'(\xi) = ((\varphi \circ p)(\xi), d_{p(\xi)} \varphi(\xi))$, $\forall \xi \in U'$

C' est dite carte associée à la carte C

(ii) L'ensemble (A) de toutes les cartes sur TM associées aux cartes de M est un C^{p-1} -atlas de TM

(iii) L'ensemble TM muni de la classe d'équivalence de l'atlas (A) est une variété différentielle de classe C^{p-1} et de dimension $2n$

Definition 5 L'ensemble TM muni de la structure de variété donnée par le théorème précédent est appelé fibré tangent de la variété différentielle M

1.3 Application tangente à f et différentielle de f .

1.3.1 Application tangente à f

Soient M et M' deux variétés différentielles et $f \in C^q(M, M')$, $q \geq 1$

Definition 6 On appelle application tangente à f , l'application notée $Tf : TM \rightarrow TM'$ définie par:

$$\forall x \in M, Tf|_{T_x M} = T_x f$$

où $T_x f$ est l'application tangente à f en x

1.3.2 Différentielle de f

Soit M une variété différentielle et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $f \in C^q(M, E)$, $q \geq 1$

On va d'abord donner la définition de la différentielle de f en x

Definition 7 On appelle différentielle de f en x l'application notée $d_x f$ définie par :

$$d_x f = \theta_{f(x)} \circ T_x f$$

où $\theta_{f(x)} : T_{f(x)}E \rightarrow E$ est l'isomorphisme canonique défini par $\theta_{f(x)} = \varphi^{-1} \circ d_x \varphi$ avec $C = (E, \varphi)$ carte de E et où φ est l'isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$

Remark 8 Soit M une variété différentielle de classe C^p et de dimension m et $C = (U, \varphi)$ est une carte de M

si $f \in C^q(M, \mathbb{R}^n)$, $p \geq q \geq 1$ alors $d_x f = D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ d_x \varphi$

Remark 9 L'isomorphisme $d_x \varphi$ défini au chapitre 1 est un exemple de différentielle de φ en x

Definition 10 On appelle différentielle de f l'application de classe C^{q-1} notée $df : TM \rightarrow E$ définie par:

$$df|_{T_x M} = d_x f$$

2 Champs de vecteurs

2.1 Champs de vecteurs

Soit M une variété différentielle de classe C^p et de dimension n

Definition 11 On appelle champ de vecteurs sur M une application $X : TM \rightarrow M$ telle que $p \circ X = Id_M$

où $p : M \rightarrow TM$ est l'application pied

Proposition 12 Pour qu'un champ de vecteurs X sur M soit de classe C^q il faut et il suffit que $\forall x \in M$, il existe une carte $C = (U, \varphi)$ de M en x telle que l'application $d\varphi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit de classe C^q .

Definition 13 $d\varphi \circ X$ est appelée expression locale du champ de vecteurs X dans la carte $C = (U, \varphi)$

Notation 14 On notera l'ensemble des champs de vecteurs par $C^q TM$, ($q \leq p-1$) ou bien par $\chi(M)$.

Proposition 15 L'ensemble $C^q TM$ a une structure de $C^q(M)$ -module (c'est à dire que $C^q TM$ est un espace vectoriel sur l'anneau des fonctions $C^q(M)$)

Remark 16 Soit $X \in C^q TM$ alors $X = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ où f_i sont des fonctions réelles

Remark 17 Soient $X \in C^q TM$ et $f \in C^s(M)$ ($s \geq 1$) alors $df \circ X \in C^t(M)$ avec $t = \inf\{q, s-1\}$, on notera $df \circ X$ par $X(f)$

Notation 18 Si U est un ouvert de M et si $f \in C^s(U)$, on notera aussi $df \circ X \in C^t(U)$ par $X(f)$

2.2 Crochet de champs de vecteurs

2.2.1 Crochet de champs de vecteurs

On va dans ce qui suit énoncer un lemme ensuite un théorème qui donnera à partir de deux champs de vecteurs l'existence d'un champ de vecteurs qu'on appellera crochet de ces deux champs de vecteurs

Lemma 19 Soient M, M' deux variétés de classe C^p , $p \geq 2$ et soient $X, Y \in C^q TM$ et $X', Y' \in C^q TM'$, $1 \leq q \leq p-1$ et $f \in C^p M, M'$

Si les champs de vecteurs satisfont $Tf \circ X = X' \circ f$ et $Tf \circ Y = Y' \circ f$

Alors

$$\xi' = T_x f(\xi)$$

où $\xi = (d_x \varphi)^{-1}((d(d\varphi \circ Y) \circ X)(x) - (d(d\varphi \circ X) \circ Y)(x)) \in T_x M$
et $\xi' = (d_{f(x)} \varphi')^{-1}((d(d\varphi' \circ Y') \circ X' \circ f)(x) - (d(d\varphi' \circ X') \circ Y' \circ f)(x)) \in T_{f(x)} M'$
 (U, φ) étant une carte de M en x
et $(U' \varphi')$ étant une carte de M' en $f(x)$

Theorem 20 Soit M une variété différentielle de classe C^p , $p \geq 2$ et soient $X, Y \in C^q TM$, $q \geq 1$.

(i) il existe un unique champ de vecteurs noté $[X, Y]$ sur M tel que, pour tout ouvert U de M et toute fonction $f \in C^p(U)$ on a:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

(ii) $[X, Y] \in C^{q-1} TM$

(iii) Si $C = (U, \varphi)$ est une carte de M alors l'expression locale de $[X, Y]$ dans cette carte est:

$$d\varphi \circ [X, Y] = d(d\varphi \circ Y) \circ X - d(d\varphi \circ X) \circ Y$$

Definition 21 Le champ de vecteurs $[X, Y]$ défini ci-dessus est appelé crochet des champs de vecteurs X et Y

Propriétés du crochet des champs de vecteurs:

- (i) $[Y, X] = -[X, Y] \quad \forall X, Y \in C^q TM (q \geq 1)$
- (ii) $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z] \quad \forall X, Y, Z \in C^q TM (q \geq 1)$
- (iii) $[X, f.Y] = f.[X, Y] + X(f).Y \quad \forall X, Y \in C^q TM \text{ et } \forall f \in C^q(M); (q \geq 1)$
- (vi) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in C^q TM (q \geq 2)$

Remark 22 Si la variété M est de classe C^∞ , alors $C^\infty TM$ est une algèbre de Lie car on a l'antisymétrie (i) et l'identité de Jacobi (iv)

2.2.2 Crochet de champ de vecteurs et champ de vecteurs tangent

Definition 23 On dit qu'un champ de vecteurs X sur M est tangent à la sous variété N de M si $\forall x \in N$ on a $X(x) \in T_x N$

Proposition 24 Si $X \in C^q TM$ est tangent à la sous variété N alors $X|_N \in C^q TN$

Theorem 25 Si X et $Y \in C^q TM (q \geq 1)$ sont tangents à la sous variété N alors $[X, Y]$ l'est aussi et on a:

$$[X, Y]|_N = [X|_N, Y|_N]$$

2.2.3 Crochet de champ de vecteurs et difféomorphisme

Definition 26 Soient M et M' deux variétés de classe $C^p (p \geq 2)$ et soit $f \in \text{Diff}^p(M, M')$

Soit $X \in C^q TM$, on appelle image de X par f , le champ de vecteurs de $C^q TM'$ défini par:

$$f_* X = Tf \circ X \circ f^{-1}$$

Theorem 27 Si $X, Y \in C^q TM (q \geq 1)$ alors $f_*[X, Y] = [f_* X, f_* Y]$

3 Courbes intégrales d'un champ de vecteurs

Soit M une variété de classe $C^p (p \geq 2)$ et $X \in C^q TM; 1 \leq q \leq p - 1$

Definition 28 Une courbe intégrale de X de condition initiale $x \in M$ est une courbe (I, u) de M de classe C^{q+1} telle que:

- (i) $0 \in I$ et $u(0) = x$
- (ii) $\frac{du}{dt} = X \circ u$

Theorem 29 $\forall x \in M$, il existe une unique courbe intégrale (I_x, u_x) de X de condition initiale x et telle que pour toute courbe intégrale (I, u) de X de condition initiale x on a:

$$I \subset I_x \text{ et } u = u_x|_I$$

Definition 30 La courbe intégrale (I_x, u_x) est appelée courbe intégrale maximale de condition initiale x

Notation 31 On notera $I_x =]t^-(x), t^+(x)[$ où $t^-(x), t^+(x) \in \mathbb{R}$ et $t^-(x) \leq 0 \leq t^+(x)$

4 Flot d'un champ de vecteurs

4.1 Flot de champ de vecteurs

Soit M une variété de classe C^p et soit $X \in C^q TM; 1 \leq q \leq p-1$

Notation 32 On note $D(X) \subset \mathbb{R} \times M$ le sous ensemble défini par:

$$(t, x) \in D(X) \Leftrightarrow t^-(x) \leq t \leq t^+(x)$$

Definition 33 On appelle flot du champ de vecteurs X l'application $\lambda : D(X) \rightarrow M$ définie par:

$$\lambda(t, x) = u_x(t) \quad \forall (t, x) \in D(X)$$

où u_x est la courbe intégrale maximale de condition initiale x
et $D(X)$ est appelé domaine du flot de X

Definition 34 Le champ de vecteurs $X \in C^q TM$ est dit complet si $D(X) = \mathbb{R} \times M$

Proposition 35 (i) Si $(t, x) \in D(X)$ alors

$$t^-(\lambda(t, x)) = t^-(x) - t \quad \text{et} \quad t^+(\lambda(t, x)) = t^+(x) - t$$

(ii) Soit $(t, x) \in D(X)$ alors $(t', \lambda(t, x)) \in D(X) \Leftrightarrow (t + t', x) \in D(X)$ et on a:

$$\lambda(t + t', x) = \lambda(t', \lambda(t, x))$$

Theorem 36 $D(X)$ est un ouvert de la variété $\mathbb{R} \times M$ et $\lambda \in C^q(D(X), M)$

Corollary 37 $\forall t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $D_t(X) = \{x \in M : t^-(x) \leq t \leq t^+(x)\}$ est un ouvert dans M

Theorem 38 $\forall t \in \mathbb{R}$ l'application $\lambda_t = \lambda(t, \cdot) \in \text{Diff}^\infty(D_t(X), D_{-t}(X))$ et $(\lambda_t)^{-1} = \lambda_{-t}$

4.2 Flot et crochet de champ de vecteurs

Soit M une variété de classe C^p ($p \geq 2$) et soit $X \in C^q TM$; $1 \leq q$ et $\lambda : D(X) \rightarrow M$ le flot de X

Theorem 39 $\forall X, Y \in C^q TM$ ($q \geq 2$) on a équi valence:

- (i) $[X, Y] = 0$
- (ii) $\forall t \in \mathbb{R}$ on a $(\lambda_{-t})_* Y = Y$ sur $D_t(X)$

5 Serie d'exercices de TD:

Exercice1

Démontrer le théorème sur la structure de variété du fibré tangent

Exercice2:

Soient M une variété différentielle, $x \in M, \xi \in T_x M$.

Démontrer $\forall f, g \in C^q(M), q \geq 1$ on a :

$$d_x(f.g)(\xi) = f(x).d_x g(\xi) + g(x).d_x f(\xi)$$

Exercice3:

Démontrer que si $f \in C^q(M, M')$ alors $Tf \in C^{q-1}(TM, TM')$

Exercice4:

Soient les champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$X = x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad Y = y^3 \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 \cdot y \cdot z$

Calculer $Y(f)$ et $[X, Y](f)$ au point $(1, 2, -3)$

Exercice5:

Soient les champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$X = z \cdot \frac{\partial}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial}{\partial z}, Y = x \cdot \frac{\partial}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial}{\partial x}, Z = y \cdot \frac{\partial}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

1) Montrer que X, Y, Z sont linéairement indépendants

2) Montrer que l'ensemble $V = \text{Eng}[\{X, Y, Z\}]$ est stable par le crochet des champs de vecteurs

3) Montrer que l'application $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\Psi(aX + bY + cZ) = (a, b, c)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels vérifiant:

$$\Psi([X, Y]) = \Psi(X) \wedge \Psi(Y)$$

4) Déterminer le flot de $aX + bY + cZ$

Exercice6:

Démontrer que:

Si $(t, x) \in D(X)$ alors $(t', \lambda(t, x)) \in D(X) \Leftrightarrow (t + t', x) \in D(X)$ et on a:

$$\lambda(t + t', x) = \lambda(t', \lambda(t, x))$$

Exercice7:

Soient $X, Y \in C^q TM$ et soient $f, g \in C^q(M); q \geq 1$

Démontrer que:

i) $[X, f.Y] = f.[X, Y] + X(f).Y$

ii) $[f.X, g.Y] = f.g.[X, Y] + f.X(g).Y - g.Y(f).X$

Exercice8:

Soient M et M' deux variétés de classe $C^p(p \geq 2)$ et soit $f \in Diff^p(M, M')$

; soit $X \in C^q TM$

i) Démontrer que $f_*X \in C^q TM'$ où $f_*X = Tf \circ X \circ f^{-1}$

ii) Démontrer que $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$