1 Les inéquations variationnelles dans IR^N

Plusieurs problèmes de l'analyse non linéaires peuvent être résolue par l'application du théorème de point fixe.

Soit F une application de l'ensemble A dans lui même.

$$F : A \rightarrow A$$

Le point $x \in A$ est dit point fixe de F si $F(x) = x$.

Definition 1 *L'application $F : S \rightarrow S$ (S est un espace normé) est une application contractante si*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \quad x, y \in S \tag{0.1}$$

Nous commencons par le théorème d'application contractante.

Theorem 2 *Soit $F : S \rightarrow S$ une application contractante, alors il existe un point fixe unique de F.*

1.1 Caractérisation de la projection sur l'ensemble convexe.

Dans cette partie, nous considérons la projection sur l'ensemble convexe K dans l'espace de Hilbert V.

Lemma 3 *Soit K un sous ensemble convexe fermé de l'espace de Hilbert V. Alors $\forall x \in V$, il existe un unique $y \in K$ tq*

$$\|x - y\| = \inf_{\eta \in K} \|x - \eta\| \tag{0.2}$$

Remark 4 *Le point $y \in K$ satisfaisant (0.2) est dit la projection de x sur K, et nous écrivons:*

$$y = P_K \ x$$

Theorem 5 *Soit K un sous ensemble convexe fermé de V.Alors $y = P_K \ x$ si et seulement si*

$$y \in K : (y - x, \eta - y) \tag{0.3}$$

Corollary 6 *Soit K un sous ensemble convexe fermé non vide de V,alors l' opérateur P_K vérifie:*

$$\|P_K x - P_K y\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V \tag{0.4}$$

Corollary 7 *Soit $K \subset IR^N$ un convexe et soit*

$$F : K \rightarrow (IR^N)'$$

continue. Alors pour $x \in K$,

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \qquad \forall y \in K \tag{0.5}$$

1.2 Inéquation Variationnelle

Nous considérons le problème suivant:

Problème 0.1

Soit K un convexe fermé dans IR^N et F:$\rightarrow \left(IR^N\right)^{'}$continue, trouver

$$x \in K, \langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \qquad \forall y \in K \tag{0.6}$$

Soit $K_R = K \cap \Sigma_R$, où Σ_R est la boule fermé de rayon R et de centre $0 \in IR^N$
.

Retournons à notre F, nous notons qu'il existe $x_R \in K_R$ tel que:

$$\langle F(x_R), y - x_R \rangle \geq 0, \qquad \forall y \in K_R \tag{0.7}$$

Soit $K_R \neq \varnothing$, nous avons alors le théorème suivant:

Theorem 8 *Soit $K \subset IR^N$ un convexe fermé non vide et F:$K \rightarrow \left(IR^N\right)^{'}$ une application continue.*

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution du problème (0.6) est l'existence

d'une constante $R > 0$ telle que la solution $x_R \in K_R$ de (0.7) satisfait

$$|x_R| < R \tag{0.8}$$

Theorem 9 ***Corollary 10*** *Soit F:$K \rightarrow \left(IR^N\right)^{'}$ satisfaisant:*

$$\begin{aligned} \frac{\langle F(x) - F(x_0) \rangle}{|x - x_0|} &\rightarrow +\infty \\ \textit{quand} \quad |x| &\rightarrow +\infty \end{aligned} \tag{0.9}$$

Pour $x_0 \in K$. Alors il existe une solution du problème(0.6).

Remark 11 *Généralement, la solution de l'inéquation variationnelle n'est pas unique.*

Cependant nous avons une condition trés naturelle qui assure l'unicité

Supposons que $x, x^{'} \in K$ sont deux solutions distinctes du problème 0.6. Alors

$$\begin{aligned} x &\in K; \langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \quad y \in K \\ x^{'} &\in K; \left\langle F\left(x^{'}\right), y - x^{'} \right\rangle \geq 0, \quad y \in K \end{aligned}$$

Alors, posons $y = x^{'}$dans la première inéquation,

$y = x$ dans la seconde, et additionnons les deux, nous obtenons :

$$\left\langle F(x) - F\left(x^{'}\right), x - x^{'} \right\rangle \leq 0$$

Alors la condition naturelle pour l'unicité est que:

$$\left\langle F(x) - F(x), x - x^{'} \right\rangle > 0 \tag{0.10}$$
$$x, x^{'} \in K, \quad x \neq x^{'} \tag{1}$$

Definition 12 *La condition (0.9) du corollaire 0.2 est une condition de coercivité.*

Definition 13 *Par analogie avec (0.10), nous disons que l'application*

$$F : K \to \left(IR^N\right)^{'}$$

est monotone si

$$\left\langle F(x) - F\left(x^{'}\right), x - x^{'} \right\rangle \geq 0, \ \forall x, x^{'} \in K$$

est dite strictement monotone si l'inégalité est maintenue. seulement quand $x = x^{'}$ tel que quand la condition (0.10) est valide.

Dans le cas d'une application strictement monotone nous avons:

Proposition 14 *Soit*

$$F : K_1 \to \left(IR^N\right)$$

une application continue strictement monotone de sous ensemble convexe $K_1 \subset IR^N$.

Soit $K_2 \subset K_1$ est un convexe. Supposons qu'il existe des solutions des problèmes

$$x_j \in K_j; \quad \langle F(x_j), y - x_j \rangle \geq 0 \quad \text{pour } y \in K_j, \ j = 1, 2$$

(i) Si $F(x_2) = 0$, alors $x_1 = x_2$

(ii) Si $F(x_2) \neq 0$, alors $x_1 \neq x_2$, alors l'hyperplan $\langle F(x_2), y - x_2 \rangle = 0$ sépare x_1 de K_2.

Soit $f \in C^1(K)$, $K \subset IR^N$, un sous ensemble convexe et soit $F(x) = \text{grad} f(x)$.

Proposition 15 *Supposons qu'il existe $x \in K$ tel que:*

$$f(x) = \underset{y \in K}{Min} \ f(y)$$

alors x est solution d'I.V

$$x \in K : \langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \qquad \forall y \in K$$

Proof. Si $y \in K$, alors $z = x + t(y - x) \in K$ pour $0 \leq t \leq 1$, cependant la fonction $\varphi(t) = f(x + t(y - x)), \ 0 \leq t \leq 1$

atteint son minimum quand $t = 0$.Par conséquent:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi^{'}(0) = (\text{grad } f(x), y - x) \\ &= \langle F(x), y - x \rangle \end{aligned}$$

L'inverse est vraie si f est convexe.

Proposition 16 *Supposons que f est convexe et x satisfait*

$$x \in K : \ \langle F(x), y - x \rangle \ \geq 0, \quad \forall y \in K$$

■

Alors

$$f(x) = \underset{y \in K}{Min} \ f(y)$$

Proof. En effet, f est convexe,

$$f(y) \geq f(x) + \langle F(x), y - x \rangle \ \geq 0, \quad \forall y \in K$$

Mais $\langle F(x), y - x \rangle \ \geq 0$, alors

$$f(y) \geq f(x)$$

■

2 Les inéquations variationnelles dans l'espace de Hilbert

1. Forme bilinéaire

Plusieurs questions interessnates dans la théorie d'I.V peuvent être formulé en terme de forme bilinéaire dans les espaces de Hilbert.

Cette théorie est une généralisation de la théorie variationnelle des problèmes aux limites pour les équations elliptique.

Soit V un espace de Hilbert, et on note par V' son dual, nous notons$(.,.)$ le produit scalaire sur V , et de sa norme $\|.\|$.

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire sur V i.e $a : V \times V \to IR$, elle est continue et bilinéaire pour toute variable u, v.

L'application linéaire continue $A : V \to V'$ détermine la forme bilinéaire suivant la relation suivante:

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \tag{1.1}$$

Definition 17 *La forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive sur V, s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \tag{1.2}$$

La forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive si et seulement si l'application A définie par (1.1) est coercive.

Problème 1.2 Soit $K \subset V$ un convexe fermé non vide, et $f \in V'$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que:} \\ a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{1.3}$$

2.1 Existence de la solution

Theorem 18 *Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire coercive sur V, $K \subset V$ un sous ensemble convexe fermé non vide de V.*

Alors il existe une unique du problème 1.3. De plus l'application $f \to u$ est lipschitzienne, tel que si $u_1,\ u_2$ sont solutions
du problème 1.3 correspondant à $f_1, f_2 \in V^{'}$, alors:

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \|f_1 - f_2\|_{V'} \tag{2.1}$$

Démontrons maintenant l'existence de la solution u.

<u>**Existence**</u> En premier supposons que $a(u,v)$ est symétrique, et définissons la fonctionnelle

$$I(u) = a(u,u) - 2\langle f, u\rangle, \quad u \in V$$

Soit $d = \inf_K I(u)$. Soit aussi u_n une suite de minimisation de I dans K telle que

$$\left\{u_n \in K\colon d \leq I(u_n) \leq d + \left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

Appliquant la loi de parallelograme, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
\alpha \|u_n - u_m\|^2 &\leq a(u_n - u_m) \\
& \quad 2I(u_n) + 2I(u_m) - 4I\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m)\right) \\
&\leq 2\left[\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{m}\right)\right]
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé

$$4\langle f, u_n\rangle + 4\langle f, u_m\rangle - 8\left\langle f, \frac{1}{2}(u_n + u_m)\right\rangle = 0.$$

La suite $\{u_n\}$ est de cauchy, et l'ensemble convexe fermé K contient un élément u, tel que $u_n \to u$ dans V
et $I(u_n) \to I(u)$ .Alors $I(u) = d$.
Maintenant $\forall v \in K$, $u + \varepsilon(v-u) \in K$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, et le fait que

$$I(u) = \inf_K u = d$$

$$u + \varepsilon(v - u) \in K$$

Implique,

$$I(u + \varepsilon(v - u)) \geq I(u)$$

Ou bien,

$$2\varepsilon a(u, v - u) + \varepsilon^2 a(v - u, v - u) - 2\varepsilon\langle f, v - u\rangle \geq 0$$

est vérifiée $\forall\varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$

Prenons $\varepsilon = 0$, aprés simplification nous remarquons que u est solution du problème 1.2, c.à.d

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle$$

D'où l'existence d'une solution.

Unicité

Nous introduisons maintenant le cas général.

Introduisons la forme bilinéaire coercive:

$$a_t(u,v) = a_0(u,v) + tb(u,v), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Où,

$$a_0(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) + a(v,u))$$

$$b(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) - a(v,u))$$

sont des parties symétrique et antisymétrique de $a(.,.)$.

Observons que $a_1(u,v) = a(u,v)$ et que $a_t(u,v)$ est coercive avec la même constante α.

Lemma 19 *Si le problème 1.2 est résolu pour $a_\tau(u,v)$ pour tout $f \in V^{'}$, alors il est solvable pour $a_t(u,v)$ pour tout $f \in V^{'}$*

$$\text{où } \tau \leq t \leq \tau + t_0,\ t_0 < \tfrac{\alpha}{M}, \text{ et}$$

$$M = \sup \frac{|b(u,v)|}{\|u\| \|v\|} < +\infty$$

Proof. On définit l'application

$$T : V \to K$$

Par $u = Tw$ si

$$u \in K : a_\tau(u, v-u) \geq \langle F_t, v-u \rangle$$

Où,

$$\langle F_t, v \rangle = \langle f, v \rangle - (t-\iota)\, b(w,v), \qquad \tau \leq t \leq \tau + t_0$$

Par hypothèse, T est bien définie.

Soit $u_1 = Tw_1$ et $u_2 = Tw_2$, en appliquant(2.1), nous avons:

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_V &\leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)(t-\tau)\, M \|w_1 - w_2\| \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) t_0 M \|w_1 - w_2\| \end{aligned}$$

Avec

$$\frac{t_0 M}{\alpha} < 1.$$

Donc T est une application contractante, et admet un point fixe unique. Pour ce cas $(u = w)$,

$$u \in K : a_t (u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle , \ \forall v \in K$$

$$\forall t, \ \tau \leq t \leq \tau + t_0.$$

Pour completer la preuve du théorème, il suffit d'observer que le problème 1.2 peut être résolue

pour $a_0(u, v)$ qui est symétrique. Appliquant alors le lemme 2.2 pour $t = 1$.

Definition 20 *Soit L un opérateur définit par:*

$$L : H_0^1 (\Omega) \to H^{-1} (\Omega)$$

■

donné par:

$$\langle Lu, v \rangle = a (u, v) , \qquad u, v \in H_0^1 (\Omega)$$

On prend

$$Lu = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(a_{i\ j} u_{x_j} \right) \in H^{-1} (\Omega)$$

$a_{i\ j}$ n'est pas necessairement symétrique. Par le téorème 2.1 nous déduisons que le problème de Dirichlet

pour L admet une unique solution.

La fonction $u \in H^1 (\Omega)$ est une sur-solution à L si

$$a (u, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in H_0^1 (\Omega) , \quad \text{avec } \xi \geq 0.$$

2.2 Problème d'obstacle ; Première proriété

Dans cette section, nous considérons le problème d'obstacle pour l'opérateur de Laplace.

Nous commençons par le cas général.

En premier soit $\Omega \subset IR^N$ un ouver borné avec une frontière régulière, et soit $a_{ij} \in L^\infty (\Omega)$ satisfaisant:

$$\frac{1}{\beta} \xi^2 \leq a_{ij} (x) \xi_i \xi_j \leq \beta \xi^2, \qquad \text{pour } \xi \in IR^N, \quad \beta \geq 1 \tag{3.1}$$

et on définit aussi

$$L : H_0^1 (\Omega) \to H^{-1} (\Omega)$$

par

$$\langle Lu, v \rangle = a (u, v) , \qquad u, v \in H_0^1 (\Omega)$$

Rappelons que si $a_{ij} \in C^1 \left(\overline{\Omega} \right)$,alors

$$Lu (x) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(a_{i\ j} u_{x_j} \right) , \qquad u \in C^2 \left(\overline{\Omega} \right)$$

est une équation elliptique dans le sens classique. considérons maintenant une fonction $\psi \in H^1(\Omega)$ qui satisfait $\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$,

On définit

$$K_\psi = K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ sur } \Omega \text{ dans } H^1(\Omega) \right\}$$

Problème 3.1

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$, trouver

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in K \\ a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle, \qquad \forall v \in K \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Theorem 21 *Le problème* (3.3) *admet une uniqe solution.*

Proof. *La preuve est immédiate du théorème 2.1, puisque (3.1) implique que:*

$$a(v, v) \geq \left(\frac{1}{\beta} \right) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

■

Ce qui confirme que $a(u, v)$ est coercive. Notons que l'orsque $a_{i\ j} = a_{j\ i}$, la solution du problème (3.3)

est une solution du problème de minimisation suivant:

$$\min_{v \in K} \{ a(v, v) - 2 \langle f, v \rangle \}$$

Nous donnons maintenant quelques caractérisation de notre solution.

Definition 22 *On dit que* $g \in H^1(\Omega)$ *est une sur solution de* $L - f$ *si*

$$\langle Lg - f \rangle = a(g, \xi) - \langle f, \xi \rangle \geq 0, \quad \textit{pour } 0 \leq \xi \in H_0^1(\Omega)$$

En particulier la solution u du problème (3.3) est une sur solution.

Theorem 23 *Soit* u *une solution du problème 3.3, et supposons que* g *est une sur soltion de* $L - f$ *satisfaisant* $g \geq \psi$ *dans* Ω.

Proof. Nous posons $\xi = \min(u, g) \in K$, puisque $g \geq \psi$ dans Ω, et $g \geq \psi$ dans Ω, et $g \geq 0$ sur $\partial\Omega$, alors

$$a(u, \xi - u) \geq \langle f, \xi - u \rangle$$

Maintenant

$$\xi - u = \min(u, g) - u \leq 0 \text{ dans } \Omega$$

alors,

$$a(g, \xi - u) \leq \langle f, \xi - u \rangle$$

D'où,

$$a(g - u, \xi - u) \leq 0.$$

Explicitement, en utilisant la définition de ξ,

$$\begin{aligned}
0 &\geq a(g-u,\xi-u) = \int_\Omega a_{ij}(g-u)_{x_j}(\xi-u)_{x_i}\,dx \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \int_\Omega a_{ij}(g-u)_{x_j}(\xi-u)_{x_i}\,dx \\
a(\xi-u,\xi-u) &\geq \left(\frac{1}{\beta}\right)\|g-u\|^2_{H^1_0(\Omega)}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\xi = u$$

ce qui donne

$$u \leq g$$

C.Q.F.D

Corollary 24 *Soit u une solution du problème 3.3 pour* $f = 0$, *et on suppose que*

$$\psi \leq M \text{ dans } \Omega \text{ où } M \geq 0,$$

■

alors

$$u \leq M \text{ dans } \Omega$$

Pour prouver cette inégalité, il suffit de choisir

$$g = M \text{ dans } \Omega$$

dans le théorème 3.2.

3 Inéquations variationnelles pour les opérateurs monotones.

Soit $K \subset V$ un ensemble convexe fermé.

Definition 25 *L'application* $A : K \to V'$ *est dite monotone si*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in K \tag{4.1}$$

L'application monotone A est dite strictement monotone si

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = 0 \quad \text{implique } u = v \tag{4.2}$$

Definition 26 *L'application* $A : K \to V'$ *est continue dans un sous espace de dimension finie si pour tout* $M \subset V$

(M est un sous espace de dimension finie). La restriction de $A/K \cap M$ est dit faiblement continue, si

$$A : K \cap M \to V^{'}$$

est faiblement continue.

Definition 27 *A est coercive sur K s'il eiste un element $\varphi \in K$ tel que*

$$\begin{aligned} \langle Au - A\varphi, u - \varphi \rangle / \|u - \varphi\| &\to +\infty \\ \textit{quand } \|u\| &\to +\infty, \ \ \forall u \in K \end{aligned} \tag{4.3}$$

Theorem 28 *Soit K un sous ensemble convexe de V et soit $A : K \to V^{'}$ monotone et continue*

dans un sous espace fermé de dimension finie, alors il existe une solution

$$u \in K : \langle Au, v - u \rangle \geq 0, \ \forall v \in K \tag{4.4}$$

Notons que si A est strictement monotone, la solution u de l'inéquation variationnelle(4.4) est unique.

Lemma 29 *Soit K un convexe fermé de V et soit $A : K \to V^{'}$ une application monotone et continue*

dans un sous espace de dimension finie. Alors u satisfait

$$u \in K : \langle Au, v - u \rangle \geq 0, \ \ \forall v \in K \tag{4.5}$$

w∈

si et seulement si

$$u \in K : \langle Av, v - u \rangle \geq 0, \qquad \forall v \in K \tag{4.6}$$

Proof. En premier, montrons que (4.5) implique (4.6). Par la propriété de monotonie de A,

$$0 \leq \langle Av - Au, v - u \rangle = \langle Av, v - u \rangle - \langle Au, v - u \rangle, \quad \forall u, v \in K$$

Alors $u \in K$:

$$0 \leq \langle Au, v - u \rangle \geq \langle Av, v - u \rangle, \ \forall v \in K$$

Nous montrons maintenant que (4.6) implique (4.5).

Soit w$\in K$,et posons pour $0 \leq t \leq 1$, $v = u + t(w - u) \in K$, puisque K est convexe. Alors par (4.6) pour $t > 0$,

$\langle A(u + t\,(w - u)\,, t(w - u) \rangle \geq 0, \qquad \forall w \in K.$

Mais $\langle A(u + t\,(w - u)\,, (w - u) \rangle \geq 0,$

Puisque A est faiblemet continue sur l'intersection de K avec un sous espace de

dimension finie, nous obtenons l'orsque $t \to 0$,

$$u \in K : \langle Au, w - u \rangle \geq 0, \quad \forall w \in K$$

C.Q.F.D

■

4 Inéquations variationnelles elliptiques

I) Introduction

Nous donnons dans cette section quelques définitions concernant les inéquations variationnelles elliptiques:

Trouver u solution du problème d'obstacle suivant:Trouver u solution du problème d'obstacle suivant:

$$\begin{cases} Au \leq f \text{ dans } \Omega \\ u \leq \psi \text{ dans } \Omega \\ (Au - f)(u - \psi) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ +\text{conditions au limites} \end{cases} \tag{5.1}$$

Dans la modélisation est une inéquation variationnelle simple.

Ω est un ouver polygonal de IR^2 à frontière Γ régulière (C^1 par morceau), $\psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ tel que $\psi > 0$ sur Γ.

Ce problème se caractérise par une zone où l'équation $Au = f$ est satisfaite et une zone où u touche

l'obstacle, la ligne de séparation est appelée frontière libre étant une inconnue.

De trés nombreux phénomène physiques mécaniques, économiques..... sont modélisable par (5.1).

4.1 Cas coercif

5 Notations et Hypothèses

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ à une frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$. Pour $u, v \in V$ $\left(V = H^1(\Omega) \text{ ou } V = H_0^1(\Omega)\right)$.On considère la forme bilinéaire suivante :

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + a_0(x) uv \right) dx \quad 5.2$$

Cette forme bilinéaire est associée à un opérateur elliptique A qui est défini

par :

$$Av = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0(x) v \quad 5.3$$

Les coefficients a_{ij}, a_i, a_0 sont suffsamment réguliers vérifiant les conditions suivantes:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \ ; x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0 \quad 5.4$$

$$a_0\,(x) \geq \beta > 0 \qquad 5.5$$

Soit f un second membre tel que:

$$f \in L^{\infty}\,(\Omega)\,;\text{et} \quad f \geq 0 \qquad 5.6$$

On suppose que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue :

$$\forall u, v \in V; \exists C > 0 : a(u,v) \leq C \left\|u\right\|_V \left\|v\right\|_V \qquad 5.7$$

Et cœrcive :

$$\forall v \in V; \exists \alpha > 0 : a(v,v) \geq \alpha \left\|v\right\|_V^2 \qquad 5.8$$

Soit ψ un obstacle tel que :

$$\psi \in W^{2,\infty}(\Omega) \ tel\ que\ \psi > 0\ sur\ \partial\Omega. \qquad 5.9$$

6 Position du problème continu

Sous les hypothèses et les notations précédentes on peut considérer le problème d'inéquation ()variationnelle elliptique à une frontière libre comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{c} Trouver\ u \in K_g\ tel\ que : \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad, \forall v \ \in K_g \\ u \leq \psi\ , v \leq \psi \end{array} \right. \qquad 6.1$$

Où K_g est le sous-ensemble convexe fermé de $H^1\,(\Omega)$ qui est défini par :

$$K_g = \left\{ v \in H^1\,(\Omega) \ \ \backslash \ \ v = g \ \text{ dans } \partial\Omega \text{ et } v \leq \psi \text{ dans } \Omega \right\} \qquad 6.2$$

Autres formulation d'inéquation variationnelle

On peut donner deux autres formulations du problème (6.1) à savoir la formulation forte et faible.

Formulation forte (5.10) est équivalente à:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u \in H_0^1\,(\Omega) \text{ tel que:} \\ \langle Au - f, v-u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in H_0^1\,(\Omega) \end{array} \right. \qquad (6.3)$$

En effet, prenons

$$v = u - \varphi, \quad \varphi \geq 0\ , \quad \varphi \in C_C^{\infty}\,(\Omega)$$

On déduit que

$$(Au - f, \varphi) \leq 0, \quad \varphi \geq 0$$

$$Au - f \leq 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

La formulation forte est alors

$$\left\{ \begin{array}{c} Au - f \leq 0, \quad u - \psi \leq 0 \\ (Au - f)(u - \psi) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{6.4}$$

Pour vérifier (5.13), on prend dans (5.12) $v = \psi$, on obtient

$$(Au - f)(\psi - u) \geq 0$$

Comme

$$Au - f \leq 0 \quad \text{ et } \ \psi - u \geq 0$$

Alors

$$(Au - f, \psi - u) \leq 0$$

Donc

$$(Au - f, \psi - u) = 0$$

La formulation faible: Si $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie(6.1), on a

$$a(v, v - u) \geq (f, v - u) \tag{6.5}$$

En effet,

$$a(v, v - u) - (f, v - u) = a(u, v - u) - (f, v - u) + a(v - u, v - u)$$

Réciproquement, si $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie (6.4) alors u vérifie (6.1)
En effet, si ω est un élément quelconque dans K, on peut prendre dans (6.4)

$$v = (1 - \xi)w + \xi u, \qquad \xi \in [0, 1]$$

Donc on a,

$$(1 - \xi)a\left((1 - \xi w + \xi u, w - u)\right) \geq (f, v - u)$$

En faisant tendre ξ vers 1, on obtientL'existence et l'unicité de la solution continue

6.1 Théorème de Stampacchia

Theorem 30 ([**cf.12**]) *Sous les hypothèses et les notations précédentes, il existe une solution unique u du problème 6.1*

Proof. L′unicité

(On va utiliser le raisonnement par l'absurde)

Soient $u_1$et u_2 deux solutions différentes du problème 6.1,

Alors nous avons:

$$a(u_1, v - u_1) \geq (f, v - u_1), \forall v \in K_g \qquad (\bigstar)$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq (f, v - u_2), \forall v \in K_g \qquad (\bigstar\bigstar)$$

Posons $v = u_2$ dans l'inéquation ($\bigstar$) on trouve :

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq (f, u_2 - u_1)$$

Donc,

$$-a(u_1, u_1 - u_2) \geq -(f, u_1 - u_2)$$

D'où

$$a(u_1, u_1 - u_2) \leq (f, u_1 - u_2) \qquad \text{(I)}$$

Posons $v = u_1$ dans l'inéquation ($\bigstar\bigstar$) on obtient:

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq (f, u_1 - u_2)$$

Donc

$$a(u_2, u_2 - u_1) \leq (f, u_2 - u_1)$$

D'où

$$-a(u_2, u_1 - u_2) \leq -(f, u_1 - u_2) \qquad \text{(II)}$$

En additionnant les deux inéquations (I) et (II) ,nous obtenons:

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

D'autre part et d'après la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$:

$$0 \leq \alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

Donc

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0$$

D'où :

$$u_1 = u_2$$

Alors, le problème **6.1** admet une solution continue unique .

L′existence : **(L'idée est de transformer le problème 6.1 en un problème de point fixe)**

Sachant que :

$$a(u, v-u) = (Au, v-u) \quad ,\forall v \in K_g$$

Le problème **6.1** est alors équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \quad Trouver\ u \in K_g\ telle\ que : \\ (Au - f, v-u) \geq 0, \forall v \in K_g \end{cases}$$

Soit $t > 0$,alors:

$$(-t(Au - f), v-u) \leq 0\ ,\forall\ v \in K_g$$

Donc

$$(u - t(Au - f) - u, v-u) \leq 0\ ,\forall\ v \in K_g$$

Soit

$$P_k : V \to K_g$$

une projection orthogonale de V sur K_g.Alors le problème **6.1** est équivalent à un problème de point fixe :

$$\begin{cases} \quad Trouver\ u \in K_g\ telle\ que : \\ u = P_k(u - t(Au - f))\ \ ,\forall\ t > 0 \end{cases}$$

Montrons maitenant que P_k est une contraction sur V.
Soient v, $w \in V$ alors :

$$\begin{array}{rl} & \|P_k(v - t(Av - f)) - P_k(w - t(Aw - f))\|^2 \\ \leq & \|P_k\|^2 \|(v - t(Av - f)) - (w - t(Aw - f))\|^2 \\ \leq & \|(v - t(Av - f)) - (w - t(Aw - f))\|^2 , car\ \ \|P_k\| \leq 1 \\ = & \|(v - w) - tA(v - w)\|^2 \\ = & \|v - w\|^2 - 2ta(v - w, v - w) + t^2 \|A(v - w)\|^2 \end{array}$$

Comme $a(.,.)$ est une forme bilinéaire coercive, alors $\exists\alpha > 0$ telle que :

$$a(v - w, v - w) \geq \alpha \|v - w\|^2$$

Alors

$$-2ta(v - w, v - w) \leq -2t\alpha \|v - w\|^2 \qquad (\forall t > 0)$$

Donc

$$\begin{array}{rl} & \|P_k(v - t(Av - f)) - P_k(w - t(Aw - f))\|^2 \\ \leq & \|v - w\|^2 - 2t\alpha \|v - w\|^2 + t^2 \|A(v - w)\|^2 \\ \leq & \|v - w\|^2 - 2t\alpha \|v - w\|^2 + t^2 M^2 \|v - w\|^2 \\ = & (1 - 2t\alpha + t^2 M^2) \|v - w\|^2 \end{array}$$

D'où

$$\|P_k\,(v - t\,(Av - f)) - P_k\,(w - t\,(Aw - f))\|^2 \leq (1 - 2t\alpha + t^2M^2)\,\|v - w\|^2$$

On choisit:

$$0 < t < \frac{2\alpha}{M^2}$$

Alors P_k est une contraction, et par le théorème du point fixe de Banach, il existe donc une solution unique $u \in K_g$. ■

7 Problème de minimisation

Soit $a(.,.)$une forme bilinéaire symétrique (c'est à dire $a(u,v) = a(v,u); \forall u, v \in V\,(\Omega)$, considérons la fonctionnelle $J(.) : V \to \mathbb{R}$ définie par:

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v) \quad ,\forall v \in V \qquad 7.1$$

Alors :
$-(i)$ $\lim_{\|v\|\to+\infty} J(v) = +\infty$
En effet ,

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|_V^2 - \|f\|_V\,\|v\|_V \to +\infty \qquad (\|v\| \to +\infty)$$

$-(ii)$ J **est strictement convexe**
En effet ,
Comme L est linéaire, il suffit de prouver que $v \to a(v,v)$ est strictement convexe.
Soit $0 < \theta < 1$ et $\forall u, v \in V$; alors :

$$0 < a(v-u, v-u) = a(u,u) + a(v,v) - 2a(u,v)$$

Ainsi on a :

$$2a(u,v) < a(u,u) + a(v,v)$$

Donc pour tout $0 < \theta < 1$ on a :

$$\begin{aligned} a(\theta u + (1-\theta)v, \theta u + (1-\theta)v) &= \theta^2 a(u,u) + (1-\theta)^2 a(v,v) + 2\theta\,(1-\theta)\,a(u,v) \\ &< \theta a(u,u) + (1-\theta)a(v,v) \end{aligned}$$

Alors $v \to J\,(v)$ est stictement convexe.
$-(iii)$ J **est continue**
En effet ,

$$\begin{cases} f \text{ est une fonction est continue} \\ a(.,.) \text{ est une forme bilinéaire continue} \end{cases}$$

$-(iv)$ $J(v)$ **est Gâteaux différentiable en** u , En effet, elle est différentiable dans toutes les directions $v \in V$, c.à.d :

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = (J'(u), v), \quad \forall v \in V$$

Soit le problème de minimisation définit comme suit :

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K_g \\ J(u) = \min\limits_{v \in K_g} J(v) \end{cases} \tag{7.2}$$

Theorem 31 *Supposons que $J(.)$ vérifie les propriétés $(i), (ii), (iii), (iv)$ alors le problème de minimisation 6.2 est équivalent au problème (P_1) qui est un problème d'inéquation variationnelle.*

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K_g \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \end{cases} \tag{P_1}$$

Proof. Soit $u \in K_g$ solution du problème (7.2), nous avons

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u+v-u) \\ &= \frac{1}{2}a(u+v-u, u+v-u) - (f, u+v-u) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}a(v-u, v-u) + \frac{1}{2}a(u, v-u) \\ &\quad + \frac{1}{2}a(v-u, u) - (f,u) - (f, v-u) \\ &= J(u) + [a(u, v-u) - (f, v-u)] + \frac{1}{2}a(v-u, v-u) \end{aligned}$$

Comme $a(.,.)$ est $V-$elliptique, ce qui implique que

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K_g$$

Inverssement, soit $u \in K$ solution de P_1 comme $J(.)$ est Gateaux différentiable en u alors

$$\left\langle J^{'}(u), v-u \right\rangle \geq 0, \ \forall v \in K_g$$

De plus, on a:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle J^{'}(u), v-u \right\rangle \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{J(u+t(v-u)-J(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}a(u+t(v-u), u+t(v-u)) - (f, u+t(v-u)) - \frac{1}{2}a(u,u) + (f,u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}a(u,u) + ta(u,v-u) + \frac{1}{2}t^2 a(v-u,v-u) - (f,u) - t(f,v-u) - \frac{1}{2}a(u,u) + (f,u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{ta(u,v-u) + \frac{1}{2}t^2 a(v-u,v-u) - t(f,v-u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} (a(u,v-u) + \frac{1}{2} ta(v-u,v-u) - (f,v-u)) \\
&= a(u,v-u) - (f,v-u)
\end{aligned}$$

Donc $u \in K_g$ est solution de (7.2).

Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues ■

Definition 32 *Soit χ l'ensemble des sous-solutions continues du problème6.1, c'est à dire l'ensemble des $z \in V$ tel que :*

$$\begin{cases} a(z,v) \leq (f,v) \\ z \leq \psi, \quad v \geq 0 \end{cases} \qquad 7.3$$

Theorem 33 ([**cf.16**])*Sous les hypothèses et les notations précédentes, la solution u du problème 6.1 est la plus grande des sous-solutions.*

Proof. (i) **On démontre d'abord que z est une sous-solution c'est à dire $z \in \chi$.**

On a u est une solution du problème 6.5, alors :

$$\begin{cases} a(u, \tilde{v}-u) \geq (f, \tilde{v}-u) \quad , \forall \tilde{v} \ \in K_g \\ u \leq \psi \ , \ \tilde{v} \leq \psi \end{cases}$$

On pose $\tilde{v} = u - v$ avec $v \geq 0$.

Donc,

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (f,v) \\ u \leq \psi \ , v \geq 0 \end{cases}$$

Alors u est une sous-solution du problème 6.5.

(ii) **On démontre maintenant que u est le plus grand élement de χ :**

Soit :

$$z = \sup_{u\in\chi} u \Leftrightarrow z \geq u$$

z est une sous-solution du problème 6.5 alors :

$$\begin{cases} a(z,v) \leq (f,v) \\ u \leq \psi \ , \ v \geq 0 \end{cases}$$

Prenons $v = z - u \geq 0$ alors,

$$\begin{cases} a(z,z-u) \leq (f,z-u) \\ u \leq \psi \ , \ z \geq u \geq 0 \end{cases} \tag{$\bigstar$}$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} a(u,v-u) \geq (f,v-u) \\ u \leq \psi \ , \ v \leq \psi \end{cases}$$

Posons $v = z \leq \psi$ donc,

$$\begin{cases} a(u,z-u) \geq (f,z-u) \\ u \leq \psi \ , \ z \leq \psi \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a(-u,z-u) \leq (-f,z-u) \\ u \leq \psi \ , z \leq \psi \end{cases} \tag{$\bigstar\bigstar$}$$

Par sommation de ($\bigstar$) et ($\bigstar\bigstar$) on obtient :

$$\begin{cases} a(z-u,z-u) \leq 0 \\ u \leq \psi \ , z \leq \psi \end{cases}$$

Mais comme $a(.,.)$ est une forme bilinéaire **coercive** alors :

$$a(z-u,z-u) \geq \alpha \left\| z-u \right\|_{H^1}^2 \geq 0$$

Ce qui nous donne :

$$a(z-u,z-u) = 0 \Longleftrightarrow z-u = 0$$

Alors,

$$z = u = \sup_{u \in \chi} u$$

D'où u est la plus grande des sous-solutions . ■

Proposition 34 *Considérons l'application δ qui est définie comme suit :*

$$\begin{array}{rcl} \delta & : & L^{\infty}(\Omega) \to L^{\infty}(\Omega) \\ (\psi,f) & \to & \delta(\psi,f) = u \end{array} \tag{7.4}$$

Où u est une solution continue du problème 6.1.

Proposition 35 *L'application δ est une application **croissante** ,**concave, linéaire** et **lipschitzienne** de constante 1.*

Proof. 1) δ est croissante :

Soient ψ_1, ψ_2 dans $L^\infty(\Omega)$ tel que : $\psi_1 \leq \psi_2$

Alors :

$$u_1 = \delta(\psi_1) \leq \psi_1 \leq \psi_2$$

Donc $u_1 = \delta(\psi_1)$ est une sous-solution pour d'I.V 6.1 avec lobstacle ψ_2 alors:

$$\delta(\psi_1) \leq \delta(\psi_2)$$

2) δ est concave :

Soient ψ_1, ψ_2 dans $L^\infty(\Omega)$ tel que : $\psi_1 \leq \psi_2$

Sachant que $u_1 = \delta(\psi_1)$ solution du problème 6.1 alors elle est une sous-solution d'où:

$$\begin{cases} a(u_1, v) \leq (f, v) & ,\forall v \in K_g \\ u_1 \leq \psi_1 \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Alors pour une constante $\epsilon \in [0, 1]$ nous avons :

$$\begin{cases} a(\epsilon u_1, v) \leq (\epsilon f, v) & ,\forall v \in K_g \\ \epsilon u_1 \leq \epsilon\psi_1 \ ; \ v \geq 0 \end{cases} \tag{I}$$

Comme on a aussi $u_2 = \delta(\psi_2)$ solution du problème 6.1alors elle est une sous-solution donc :

$$\begin{cases} a(u_2, v) \leq (f, v) & ,\forall v \in K_g \\ u_2 \leq \psi_2 \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Comme $\epsilon \in [0, 1]$ alors $(1 - \epsilon) \in [0, 1]$.

Donc

$$\begin{cases} a((1-\epsilon) u_2, v) \leq ((1-\epsilon) f, v) & ,\forall v \in K_g \\ (1-\epsilon) u_2 \leq (1-\epsilon)\psi_2 \ ; \ v \geq 0 \end{cases} \tag{II}$$

Par sommation des deux systèmes **?? ??** on trouve :

$$\begin{cases} a(\epsilon u_1 + (1-\epsilon) u_2, v) \leq (\epsilon f + (1-\epsilon) f, v) & ,\forall v \in K_g \\ \epsilon u_1 + (1-\epsilon) u_2 \leq \epsilon\psi_1 + (1-\epsilon)\psi_2 \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

$(\epsilon u_1 + (1-\epsilon) u_2)$ est sous solution par rapport l'obstacle $(\epsilon\psi_1, (1-\epsilon)\psi_2)$

Donc $\epsilon u_1 + (1-\epsilon) u_2$ est la plus grande des sous-solutions , alors :

$$\delta(\epsilon\psi_1 + (1-\epsilon)\psi_2) \leq \epsilon u_1 + (1-\epsilon) u_2$$

D'où

$$\delta(\epsilon\psi_1 + (1-\epsilon)\psi_2) \leq \epsilon\delta(\psi_1) + (1-\epsilon)\delta(\psi_2)$$

Alors δ est une application convexe , d'où la concavité .

3) δ est linéaire :

Soit $u_1 = \delta(\psi + \phi)$ solution du problème 6.1 par rapport à l'obstacle $\psi + \phi$ et au second membre f ,alors :

$$\begin{cases} a(u_1, v - u_1) \geq (f, v - u_1) & ,\forall v \in K_g \\ u_1 \leq \psi \ ; \ v \leq \psi \end{cases}$$

Donc $u_1 = \delta(\psi + \phi)$ est une sous solution du problème6.1 , c'est à dire :

$$\begin{cases} a(\delta(\psi+\phi), v) \leq (f, v) \quad ,\forall v \ \in K_g \\ \delta(\psi+\phi) \leq \psi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Soit aussi $u_2 = \delta(\psi)$ la solution du problème 6.1 par rapport à l'obstacle ψ et au second membre f alors :

$$\begin{cases} a(u_2, v - u_2) \geq (f, v - u_2) \quad ,\forall v \ \in K_g \\ u_2 \leq \psi \ ; \ v \leq \psi \end{cases}$$

Donc elle est une sous solution du problème 6.1 ,d'où :

$$\begin{cases} a(\delta(\psi), v) \leq (f, v) \quad ,\forall v \ \in K_g \\ \delta(\psi) \leq \psi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

En ajoutant un paramétre $\phi > 0$ à l'obstacle ψ ,on trouve :

$$\begin{cases} a(\delta(\psi), v) \leq (f, v) \quad ,\forall v \ \in K_g \\ \delta(\psi) + \phi \leq \psi + \phi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

On a aussi :

$$a(\delta(\psi), v) + \int_\Omega a_0 \phi v dx \leq (f, v) + \int_\Omega a_0 \phi v dx, \forall v \ \in K_g$$

Alors,

$$\begin{cases} a(\delta(\psi), v) + \int_\Omega a_0 \phi v dx \leq (f, v) \quad + \int_\Omega a_0 \phi v dx \ ,\forall v \ \in K_g \\ \delta(\psi) + \phi \leq \psi + \phi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Comme on a :

$$a(\phi, v) = \int_\Omega a_0 \phi v dx$$

Donc

$$\begin{cases} a(\delta(\psi) + \phi, v) \leq (f + a_0\phi, v) \quad ,\forall v \ \in K_g \\ \delta(\psi) + \phi \leq \psi + \phi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Alors $\delta(\psi) + \phi$ est une sous solution par rapport à l'obstacle $\psi + \phi$.
Mais $\delta(\psi + \phi)$ est la plus grande des sous solutions .

$$\begin{cases} a(\delta(\psi+\phi), v) \leq (f + a_0\phi, v) \quad ,\forall v \ \in K_g \\ \delta(\psi+\phi) \leq \psi + \phi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

D'où:

$$\delta(\psi) + \phi \leq \delta(\psi + \phi) \tag{I}$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} a(\delta(\psi+\phi), v) \leq (f, v) \quad ,\forall v \ \in K_g \\ \delta(\psi+\phi) \leq \psi + \phi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Comme $f \leq f + a_0\phi$ donc :

$$\begin{cases} a(\delta\left(\psi+\phi\right), v) \leq (f,v) \leq (f+a_0\phi, v) & ,\forall v \ \in K_g \\ \delta\left(\psi+\phi\right) \leq \psi+\phi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a(\delta\left(\psi+\phi\right), v) - \int\limits_{\Omega} a_0\phi v dx \leq (f,v) & ,\forall v \ \in K_g \\ \delta\left(\psi+\phi\right) \leq \psi+\phi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a(\delta\left(\psi+\phi\right) - \phi, v) \leq (f,v) & ,\forall v \ \in K_g \\ \delta\left(\psi+\phi\right) \leq \psi+\phi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Alors $\delta\left(\psi+\phi\right) - \phi$ est une sous solution du problème 6.1 avec l'obstacle ψ
Mais $\delta\left(\psi\right)$ est la plus grande des sous solutions ,donc :

$$\delta\left(\psi+\phi\right) - \phi \leq \delta\left(\psi\right)$$

Ce qui implique que :

$$\delta\left(\psi+\phi\right) \leq \delta\left(\psi\right) + \phi \qquad (II)$$

Alors d'après **??** et **??** on trouve :

$$\begin{aligned} \delta\left(\psi+\phi\right) &\leq \delta\left(\psi\right) + \phi \\ &\leq \delta\left(\psi+\phi\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\delta\left(\psi+\phi\right) = \delta\left(\psi\right) + \phi$$

4) δ est lipschitzienne :
On note par :

$$\Phi = \psi - \tilde{\psi}$$

Si

$$\psi \leq \tilde{\psi}$$

Alors

$$\psi \leq \tilde{\psi} + \Phi$$

Par application de δ on obtient :

$$\delta\left(\psi\right) \leq \delta\left(\tilde{\psi} + \Phi\right) = \delta\left(\tilde{\psi}\right) + \Phi$$

Alors,

$$\delta\left(\psi\right) - \delta\left(\tilde{\psi}\right) \leq \Phi$$

Donc

$$\begin{aligned} \left|\delta\left(\psi\right) - \delta\left(\tilde{\psi}\right)\right| &\leq \left\|\delta\left(\psi\right) - \delta\left(\tilde{\psi}\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \left\|\Phi\right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &= \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

■

Proposition 36 *Soit c une constante positive, alors nous avons :*

$$\delta(f,\psi)+c=\delta(f+a_0c,\psi+c) \qquad 7.5$$

Proof. On pose

$$u=\delta(f,\psi)$$

u est une sous solution alors :

$$\begin{cases} a(u,v)\leq(f,v) \\ u\leq\psi, v\geq 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a(u,v)+\int\limits_{\Omega} ca_0vdx\leq(f,v) \quad +\int\limits_{\Omega} ca_0vdx \ ,\forall v \ \in K_g \\ u+c\leq\psi+c \ ; \ v\geq 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a(u,v)+a(c,v)\leq(f+ca_0,v) \\ u+c\leq\psi+c \ ; \ v\geq 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} a(u+c,v)\leq(f+ca_0,v) \\ u+c\leq\psi+c \ ; \ v\geq 0 \end{cases}$$

Alors $u+c$ est une sous solution , Mais $\tilde{u}=\delta(f+a_0c,\psi+c)$ est la plus grande des sous solutions, c'est à dire :

$$u+c\leq\tilde{u}$$

D'où

$$\delta(f,\psi)+c\leq\delta(f+a_0c,\psi+c)$$

Montrons maintenant que

$$\delta(f+a_0c,\psi+c)\leq\delta(f,\psi)+c$$

Soit $\xi=\delta(f+a_0c,\psi+c)$ une solution pour l'I.V,on a

$$\begin{cases} a(\xi,v-\xi)\geq(f+a_0c,v-\xi) \quad ,\forall v \ \in V \\ v\leq\psi+c, \quad \xi\leq\psi+c \end{cases}$$

d'une part on a

$$\begin{aligned} (f+a_0c,v-\xi) &= (f,v-\xi)+(a_0c,v-\xi) \qquad (*) \\ &= (f,v-\xi)+\int\limits_{\Omega} a_0c(v-\xi)dx \end{aligned}$$

D'autr part

$$a(c,v-\xi) \quad = \quad \int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial (v-\xi)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x\right)\frac{\partial c}{\partial x_i}\left(v-\xi\right)+a_0\left(x\right)c(v-\xi)\right)dx \quad (**)$$

$$\int_{\Omega} a_0\left(x\right)c(v-\xi)dx$$

En substituant (**) dans (*), nous obtenons

$$(f+a_0 c, v-\xi) = (f, v-\xi) + a(c, v-\xi) \qquad (3^*)$$

En substituant 3* dans(*), on obtient

$$\begin{cases} a(\xi, v-\xi) \geq (f, v-\xi) \; + a(c, v-\xi) \;, \forall v \; \in H_0^1\left(\Omega\right) \\ \qquad v \leq \psi + c, \;\; \xi \leq \psi + c \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a(\xi - c, v-\xi) \geq (f, v-\xi) \quad, \forall v \; \in H_0^1\left(\Omega\right) \\ \qquad v \leq \psi + c, \;\; \xi \leq \psi + c \end{cases}$$

Posons $v = \xi - \breve{v} \geq 0$, il vient que

$$a(\xi - c, \breve{v}) \leq \left(f, \breve{v}\right) \quad, \forall v \; \in H_0^1\left(\Omega\right)$$
$$\breve{v} \geq 0, \;\; \xi - c \leq \psi$$

Donc $\xi - c$ est une solution pour l'obstacle ψ et le second membre f.
Le fait que $\delta(f,\psi)$ est la plus grande des sous solutions.On conclut que

$$\delta(f+a_0 c, \psi + c) \leq \delta(f,\psi) + c$$

■

Donnons maintenant quelques propriétés de la monotonie de la solution continue d'inéquation variationnelle continue.

8 Propriété de la monotonie de la solution continue d'I.V continue

8.1 La monotonie de la solution continue par rapport au second membre f

Lemma 37 *Soient f, $\tilde{f}$ deux seconds membres du problème 6.1,on note par $u = \delta\left(f\right)$ $\left(resp.\tilde{u} = \delta\left(\tilde{f}\right)\right)$ les solutions correspondantes aux seconds membres f et $\tilde{f}$, nous avons :*

$$\text{Si } \; f \leq \tilde{f} \quad alors \quad u = \delta\left(f\right) \leq \tilde{u} = \delta\left(f\right) \qquad 8.1$$

et

$$\left\|\delta\left(f\right)-\delta\left(\tilde{f}\right)\right\|_{\infty}\leq c\left\|f-\tilde{f}\right\|_{\infty}$$

Proof. Soit u une solution continue du problème 6.1 par rapport au second membre f

Alors,

$$\left\{\begin{array}{c} a(u,v)\leq(f,v) \quad ,\forall v\ \in K_g \\ u\leq\psi\ ;\ v\geq 0\end{array}\right.$$

Si

$$f\leq\tilde{f} \qquad\qquad v\geq 0$$

Alors

$$(f,v)\ \ \leq\left(\tilde{f},v\right) \qquad\qquad v\geq 0$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{c} a(u,v)\leq(f,v)\leq\left(\tilde{f},v\right) \quad ,\forall v\ \in K_g \\ u\leq\psi\ ,\ v\geq 0\end{array}\right.$$

Ce qui donne,

$$u\in\tilde{\chi}$$

C'est à dire u est une sous solution pour l'I.V avec le second membre $\tilde{f}$

Mais,

$$\tilde{u}=\delta\left(\tilde{f}\right)$$

est la plus grande des sous solutions alors,

$$u=\delta\left(f\right)\leq\delta\left(\tilde{f}\right)=\tilde{u}$$

D'où la monotonie de la solution continue par rapport au second membre f.

Sachant que l'application δ est Lipchitzienne dans $L^{\infty}\left(\Omega\right)$. ■

Soient $f,\tilde{f}\in L^{\infty}\left(\Omega\right)$ et $\xi=\delta\left(f\right)$ et $\widetilde{\xi}=\delta\left(\tilde{f}\right)$, posons $\Phi=c\left\|f-\tilde{f}\right\|_{\infty}$, avec $a_0c\geq 1$.

On a

$$f\leq\tilde{f}+a_0c\left\|f-\tilde{f}\right\|\leq\tilde{f}+a_0\Phi$$

D'où,

$$\delta\left(f\right)-\delta\left(\tilde{f}\right)\leq\Phi$$

De la même manière, échangeant les rôles de $\delta\left(f\right)$ et $\delta\left(\tilde{f}\right)$, nous obtenons

$$\delta\left(\tilde{f}\right)-\delta\left(f\right)\leq\Phi$$

Donc,

$$\left\|\delta\left(f\right)-\delta\left(\tilde{f}\right)\right\|_{\infty}\leq c\left\|f-\tilde{f}\right\|_{\infty}$$

8.2 La monotonie de la solution continue par rapport à l'obstacle ψ

Lemma 38 *Soient* $\psi, \tilde{\psi}$ *deux obstacles du problème 6.1 , on note par* $u = \delta(\psi)$ $\left(resp. \tilde{u} = \delta\left(\tilde{\psi}\right)\right)$ *les solutions correspondantes aux obstacles* ψ *et* $\tilde{\psi}$ *alors nous avons :*

$$\text{Si } \psi \leq \tilde{\psi} \quad alors \quad u = \delta(\psi) \leq \tilde{u} = \delta\left(\tilde{\psi}\right) \qquad 8.2$$

Proof. Soit u une solution continue du problème 6.1. par rapport à l'obstacle ψ

Alors,

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (f,v) \quad ,\forall v \in K_g \\ u \leq \psi \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Si

$$\psi \leq \tilde{\psi}; \ v \geq 0$$

Donc

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (f,v) \ ,\forall v \in K_g \\ u \leq \psi \leq \tilde{\psi} \ ; \ v \geq 0 \end{cases}$$

Alors u est une sous solution pour l'obstacle $\tilde{\psi}$ et le second membre f;
Mais $\tilde{u} = \delta\left(\tilde{\psi}\right)$ est la plus grande des sous solutions , alors :

$$u = \delta(\psi) \leq \delta\left(\tilde{\psi}\right) = \tilde{u}$$

D'où la monotonie de la solution continue par rapport à l'obstacle ψ. ■

8.3 Propriété générale de la monotonie de la solution continue

Le lemme ci-dessous établit une propriété générale de la monotonie de la solution continue du problème 6.1 en ce qui concerne le second membre f et l'obstacle ψ.

Lemma 39 *Soient* (ψ, f) *et* $\left(\tilde{\psi}, \tilde{f}\right)$ *deux couples tels que :* f *et* $\tilde{f}$ *sont deux seconds membres et* ψ *et* $\tilde{\psi}$ *sont deux obstacles ,on note par* $u = \delta(\psi, f)$ $\left(resp. \tilde{u} = \delta\left(\tilde{\psi}, \tilde{f}\right)\right)$ *les solutions correspondantes du problème 6.1 . On a :*

$$\text{Si } \psi \geq \tilde{\psi} \quad et \ f \geq \tilde{f}, \ Alors \quad \delta(\psi, f) \geq \delta\left(\tilde{\psi}, \tilde{f}\right) \qquad 8.3$$

Proof. Soit $v = min(0, u - \tilde{u})$, dans le cas où v est négatif $(v \leq 0)$, on a

$$u < \tilde{u} \leq \tilde{\psi} \leq \psi$$

c'est à dire que l'obstacle n'est pas actif pour u.

Donc,pour cela nous avons

$$a(u,v) = (f,v); (car\ u < \psi),$$

Comme on a:

$$\tilde{u} \leq \tilde{\psi}$$

Alors si on ajout un v qui est négatif on obtient:

$$\tilde{u} + v \leq \tilde{\psi}$$

On a $\tilde{u}$ est une sur-solution de ce problème i.e :

$$a(\tilde{u},v) \geq (f,v)$$

Donc

$$a(\tilde{u},v) \geq a(u,v)$$

Alors

$$a(\tilde{u}-u,v) \geq 0$$

Mais on a :

$$a(v,v) = a(u-\tilde{u},v) = -a(\tilde{u}-u,v) \leq 0$$

D'aute part on sait que la forme bilinéaire est coercive i.e:

$$a(v,v) \geq \alpha \left\|v\right\|^2 ; \quad \alpha > 0$$

Donc

$$a(\tilde{u}-u,v) = 0$$

D'où

$$v = 0$$

Par conséquence,

$$u \geq \tilde{u}$$

c'est à dire on a :

$$u = \delta(\psi,f) \geq \delta\left(\tilde{\psi},\tilde{f}\right) = \tilde{u}$$

D'où la monotonie de la solution continue par rapport à l'obstacle ψ et au second membre f. ■

Nous donnons quelques propriétés de la lipschitzianité de la solution continue d'I.V.

8.4 Propriété de Lipschitzianité de la solution continue par rapport à l'obstacle

Le lemme ci-dessous établit une propriété de la lipschitzianité de la solution continue du problème 6.1 en ce qui concerne l'obstacle ψ.

Lemma 40 *Soient $\psi, \tilde{\psi}$ deux obstacles du problème 6.1 , on note par $u = \delta(\psi)$ $\left(resp. \tilde{u} = \delta\left(\tilde{\psi}\right)\right)$ les solutions correspondantes aux obstacles ψ et $\tilde{\psi}$ alors nous avons :*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{8.4}$$

Proof. On note :

$$\Phi = \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

On a :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi + \tilde{\psi} - \tilde{\psi} \leq \tilde{\psi} + \left|\psi - \tilde{\psi}\right| \\ &\leq \tilde{\psi} + \sup_{\Omega} ess \left|\psi - \tilde{\psi}\right| \\ &= \tilde{\psi} + \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Alors on trouve que:

$$\psi \leq \tilde{\psi} + \Phi$$

Soit f un second membre , par application de δ on obtient :

$$\delta(\psi, f) \leq \delta\left(\tilde{\psi} + \Phi, f + \Phi\right)$$

Maintenant en utilisant le lemme précédent on obtient:

$$\delta(\psi, f) \leq \delta\left(\tilde{\psi} + \Phi, f + \Phi\right) = \delta\left(\tilde{\psi}, \tilde{g}\right) + \Phi$$

Alors

$$\delta(\psi, f) - \delta\left(\tilde{\psi}, f\right) \leq \Phi$$

De même, si on change les rôles des couples (ψ, g) et $(\tilde{\psi}, g)$ on obtient :

$$\delta\left(\tilde{\psi}, f\right) - \delta(\psi, f) \leq \Phi$$

Alors,

$$\delta\left(\tilde{\psi}, f\right) - \delta(\psi, f) \leq \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

D'où la lipschitzianité de la solution continue par rapport à l'obstacle ψ. ■

Le lemme ci-dessous établit une propriété générale de la lipschitzianité de la solution continue du problème 6.1 en ce qui concerne la condition aux bords g et l'obstacle ψ

8.5 Propriété générale de lipschitzianité de la solution continue

Proposition 41 *Soient* (ψ, g) *et* $\left(\tilde{\psi}, \tilde{g}\right)$ *deux couples tels que:* g *et* $\tilde{g}$ *sont les condition aux limites,* ψ *et* $\tilde{\psi}$ *sont deux obstacles et* $u = \delta(\psi, g)\,;\tilde{u} = \delta\left(\tilde{\psi}, \tilde{g}\right)$ *les solutions correspendantes du problème 6.1. Alors , nous avons :*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \tag{8.5}$$

Proof. On note :

$$\Phi = \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

On a :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi + \tilde{\psi} - \tilde{\psi} \leq \tilde{\psi} + \left|\psi - \tilde{\psi}\right| \leq \tilde{\psi} + \sup_{\Omega} ess \left|\psi - \tilde{\psi}\right| \\ &\leq \tilde{\psi} + \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

Alors on trouve que:

$$\psi \leq \tilde{\psi} + \Phi$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} g &= g + \tilde{g} - \tilde{g} \leq \tilde{g} + |g - \tilde{g}| \leq \tilde{g} + \sup_{\partial\Omega} ess\, |g - \tilde{g}| \\ &\leq \tilde{g} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \tilde{g} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Alors

$$g \leq \tilde{g} + \Phi$$

Maintenant en utilisant le lemme précédent on obtient:

$$\delta(\psi, g) \leq \delta\left(\tilde{\psi} + \Phi, \tilde{g} + \Phi\right) = \delta\left(\tilde{\psi}, \tilde{g}\right) + \Phi$$

Alors

$$\delta(\psi, g) - \delta\left(\tilde{\psi}, \tilde{g}\right) \leq \Phi$$

De même, si on change les rôles des couples (ψ, g) et $(\tilde{\psi}, g)$ on obtient :

$$\delta\left(\tilde{\psi}, \tilde{g}\right) - \delta(\psi, g) \leq \Phi$$

Alors,

$$\delta\left(\tilde{\psi}, \tilde{g}\right) - \delta(\psi, g) \leq \left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

D'où la lipschitzianité de la solution continue par rapport à l'obstacle ψ et à la valeur aux limites g. ■

Remark 42 *Si $\psi = \tilde{\psi}$ alors 8.5 devient :*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \ \|g - \tilde{g}\|_{L^{\infty}(\partial\Omega)} \qquad 8.6$$

Qui nous donne seulement la lipschitzianité de la solution u par rapport à la condition aux bords g.

9 La régularité de la solution continue

La régularité de la solution de l'I.V continue du problème 6.1 repose sur le théorème suivant :

Theorem 43 (**cf**. [**12**] , [**15**]) *la solution u du problème continu 6.1 satisfait la propriété de régularité suivante :*

$$u \in W^{2,p}(\Omega), 2 \leq p \leq \infty \qquad 9.1$$

10 Inéquations variationnelle du second genre (2ème espece)

Soit le problème d'inéquation variationnelle de 2 ème espèce suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u \in V \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u \rangle , \quad \forall v \in V \end{array} \right. \tag{10.1}$$

Où,
-V est un espace de Hilbert.
-$j(.)$ est une convexe propre et semi continue inférieurement.

Theorem 44 *Si $a(.,.)$ est symétrique, l'I.V(10.1) est équivalente au problème de minimisation suivant:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Trouver } u \in V \quad tq \\ I(u) = \min I(v) \\ I\left(v\right) = \frac{1}{2}a\left(v, v\right) + j\left(v\right) - l\left(v\right) \end{array} \right. \tag{10.2}$$

Proof. $a\left(v - u, v - u\right) = a\left(v, v\right) - 2a\left(u, v\right) + a\left(u, u\right) \geq 0,$
■

et $\qquad a\left(u, v\right) \geq l\left(v\right) - l\left(u\right) + a\left(u, u\right) + j\left(u\right) - j\left(v\right),$
d'où, $\qquad a\left(v, v\right) + a\left(u, u\right) \geq 2l\left(v\right) - 2l\left(u\right) + 2a\left(u, u\right) + 2j\left(u\right) - 2j\left(v\right)$
$-a\left(u, u\right).$
Donc $\qquad a\left(v, v\right) + 2j\left(v\right) - 2l\left(v\right) \geq a\left(u, u\right) + 2j\left(u\right) - 2l\left(u\right).$
Inversement; supposons que u est solution de (10.2). Comme $I(.)$ est Gateaux

differentiable en u..Alors

$$\left\langle I^{'}(u), v-u \right\rangle \geq 0,\ \forall v \in K_g$$

De plus, on a

$$0 \leq \left\langle I^{'}(u), v-u \right\rangle = \lim_{t \to 0} \frac{I(u+t(v-u)) - I(u)}{t}$$

En remplaçant $I(.,.)$ par sa forme, on obtient aprés un détail très simple

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle I^{'}(u), v-u \right\rangle = \lim_{t \to 0} (a(u, v-u) + \frac{1}{2} t a(v-u, v-u) - (f, v-u)) \\ &= a(u, v-u) - (f, v-u) \end{aligned}$$

d'où l'équivalence.

Theorem 45 *Soit V un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue coercive, et soit $j : V \to IR$*

une fonctionnelle convexe propre et semi continu inférieurement sur V, alors l'I.V du second espèce (10.1) admet une unique solution.

Proof. Montrons d'abord l'unicité de la solution

Sachant que u est solution d'I.V du second genre, on suppose que u_1 et u_2 sont 2 solutions du même I.V, ■

$$a(u_1, u_2 - u_1) + j(u_2) - j(u_1) \geq l(u_2 - u_1)$$
$$a(u_2, u_1 - u_2) + j(u_1) - j(u_2) \geq l(u_1 - u_2)$$

Additionnons les 02 inégalités, on obtient -$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2 \geq 0$.

Le fait que $a(.,.)$ est coercive, $u_1 = u_2$

Existence

Premier cas

Nous considérons le cas d'une forme bilinéaire symétrique, l'inéquation variationnelle (10.1) est équivalente

au problème de minimisation (10.2)

Puisque $j(.)$ est convexe propre et semi continue inferieurement:

$$\underset{\|v\| \to \infty}{Lim} I(v) \to +\infty$$

Nous remarquons que le problème (10.2) et par conséquant le problème (10.1) admet une solution.

Pour le cas général sans la supposition de symétrie, nous allons convertir le problème en un problème équivalent

de point fixe. $\forall \theta > 0$, le problème (10.1) est équivalent à trouver $u \in V$ tq:

$$(u, v-u) + \theta j(v) - \theta j(u) \geq (u, v-u) - \theta a(u, v-u) + \theta \langle f, v-u \rangle, \quad \forall v \in V \quad (10.3)$$

Maintenant $\forall u \in V$ considérons le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } w \in V \text{ tq} \\ (w, v-w) + \theta j(v) - \theta j(w) \geq (u, v-w) - \theta a(u, v-w) + \theta \langle f, v-w \rangle, \quad \forall v \in V \end{array} \right. \tag{10.4}$$

Ce problème admet une unique solution pour

$$w = P_\theta u$$

Le point fixe de l'application P_θ est solution du problème (10.1) pour θ suffisament petit $\theta > 0$,

P_θ est une contraction et donc admet un point fixe unique.

$\forall u_1, u_2 \in V$, soit $w_1 = P_\theta u_1$ et $w_2 = P_\theta u_2$, alors nous avons

$$(w_2, w_2 - w_1) + \theta j(w_2) - \theta j(w_2) \geq (u_1, w_2 - w_1) - \theta a(u_1, w_2 - w_1) + \theta \langle f, w_2 - w_1 \rangle$$

De même

$$(w_1, w_1 - w_2) + \theta j(w_1) - \theta j(w_2) \geq (u_2, w_1 - w_2) - \theta a(u_2, w_1 - w_2) + \theta \langle f, w_1 - w_2 \rangle$$

Additionnant les 02 inégalités et par simplification, nous obtenons:

$$\begin{array}{rcl} \|w_1 - w_2\|_V^2 & \leq & (u_1 - u_2, w_1 - w_2) - \theta a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) \\ & = & ((I - \theta A)(u_1 - u_2, w_1 - w_2) \end{array}$$

Donc,

$$\|(I - \theta A)u\|_V^2 \leq (1 - 2\theta\alpha + \theta^2 M^2) \|u\|^2$$

Où α et M sont les constantes de continuité et coercivité de $a(.,.)$.

Pour $\theta \in \left(0, \frac{2\alpha}{M^2}\right)$, l'application P_θ est contractante sur l'espace V. C.Q.F.D

11 La régularité de la solution continue

La régularité de la solution de l'I.V continue 6.1 repose sur le théorème suivant :

Theorem 46 (**cf.** [**12**], [**15**]) *la solution u du problème continu 6.1 satisfait la propriété de régularité suivante :*

$$u \in W^{2,p}(\Omega), 2 \leq p \leq \infty \qquad 10.5$$

References

[1] **A. Signorini**, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progressodella Scienze, 1933.

[2] **G. Fichera**, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con am-bigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 1964.

[3] **G. Stampacchia**, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci.Paris, 258, 1964.

[4] **J. L. Lions, G. Stampacchia**, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 1967.

[5] **G. Stampacchia**, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators ,Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[6] **J. L. Lions**, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,Dunod, Paris, 1969.

[7] **Brezis. H**, Problems Unlatrux.J.de Math Pures et Appliques.51,1168.(1972).

[8] **P.G. Ciarlet, P.-A. Raviart**, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, Comput. Meth. in Appl. Mech. Eng. 2, (1973).

[9] **U. Mosco**, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Construc-tive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[11] **A. Bensoussan** and **J.L. Lions**, On the asymptotic behaviour of the solution of variational inequalities, In Theory of Linear Operators, Akademic Verlag, Berlin, (1978).

[12] **D. Kinderlehrer and G. Stampacchia**, An introduction to variational inequalities and thier Application. Academic Pess, (1980).

[13] **R.Glowinsky, J.L.Lions , R.Tremolieres** : Numerical Analysis of Variational Inequalities,studies in mathematics and its applications, volume 8,(North-holand, Amsterdam, 1981).

[14] **A. Bensoussan** and **J. L. Lions**, Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control (English Version),î North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.

[15] **Glowinski. R**, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1984.

[16] **Ph. Cortey-Dumont**, On finite element approximation in the L^{∞}-norm of variational inequalities with non linear operators, Numer. Math.47(1), (1985).

[17] **Ph. Cortey-Dumont**, Sur les inéquations variationnelles à opérateurs non coercifs, M2AN, (1985), 19, 195-212.

[18] **M. Boulbrachène**, Sur quelques questions d'approximations de problèmes à frontières libre,de sous-domaines et d'erreurs d'arrondi, Thèse de Doctorat de l'université de Franche, Comt´e Besançon, France, (1987).