Chapitre 04 : L'analyse de variance à deux facteurs = L'analyse de variance à deux critères de classification (ANOVA à deux facteurs) :

L'analyse de variance à deux facteurs peut être considérée comme une généralisation de l'analyse de variance à un facteur, permettant de tenir compte simultanément de deux facteurs.
Globalement, les conditions d'application de l'analyse de variance à deux facteurs sont de lamême nature que pour un seul facteur : **populations normales, de même variance, et échantillons simples et indépendants.**
N.B :Cette analyse correspond grosso modo à une double ANOVA à un critère de classification
Nous irons plus rapidement dans la description de ce modèle :

4-1 : ANOVA à deux facteurs sans interaction

Ce modèle nous permet uniquement de tester l'effet de chaque critère uniquement, mais **PASl'interaction.**
On suppose qu'un facteur contrôlé A possède I modalités, chacune d'elle étant notée $\mathbf{A}_\iota$.
Demême, on suppose qu'un facteur contrôlé B possède ϑ modalités, chacune d'elle étant notée $\mathbf{B}_\varphi$.
Pour chaque couple de modalités (A_ι;B_φ), nous effectuons une seule mesure de la variable réponse Ψ , toujours supposée continue, ce qui est assez fréquemment le cas.
Nous noterons ν le nombre total de mesures effectuées (d'observations): $\nu = I \times \vartheta$.

- Le modèle le plus simple **(sans interaction)** est d'additionner les effets du facteur F_A avec les effets du facteur F_B.Pour cela, on introduit le modèle suivant:

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{i,j} \quad , \quad i = 1, \cdots, I\,;\, j = 1, \cdots, J\,.$$

$$\text{avec les contraintes supplémentaires : } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0.$$

Où :
μ: est l'effet moyen
α_i: est l'effet dû au niveau i du facteur F_A
β_i : est l'effet dûau niveau j du facteur F_B

$Y_{i,j}$ est la valeur prise par la variable réponse Y dans les conditions (A_i, B_j). On supposera toujours réalisées les hypothèses standards suivantes :

1. $\varepsilon_{i,j}$ et $\varepsilon_{k,l}$ sont indépendantes si $(i,j) \neq (k,l)$ avec $1 \leq i,k \leq I$ et $1 \leq j,l \leq J$.
2. $\forall (i,j)$, $i = 1, \cdots, I$; $j = 1, \cdots, J$, $\mathcal{L}(\varepsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Nous regroupons les valeurs prises par la variable réponse **Ψ** dans les conditions (**Aι;Bφ**) dans le tableau ci-dessous :

Facteur A	**Facteur B**				
	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_J
A_1	$Y_{1,1}$	$\cdots$	$Y_{1,j}$	$\cdots$	$Y_{1,J}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	$Y_{i,1}$	$\cdot$	$Y_{i,j}$	$\cdots$	$Y_{i,J}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	$Y_{I,1}$	$\cdots$	$Y_{I,j}$	$\cdots$	$Y_{I,J}$

Tableau des valeurs de la variable réponse Y

On appelle variation théorique due au facteur A, la quantité :

La variation théorique totale est définie par :

$$SC_{TOT} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Y_{i,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2 .$$

On appelle variation théorique due au facteur A, la quantité :

$$SC_A = J \sum_{i=1}^{I} (Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet})^2 .$$

De la même façon, la variation théorique due au facteur B est :

$$SC_B = I \sum_{j=1}^{J} (Y_{\bullet,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2 .$$

La variance résiduelle est définie par :

$$SC_R = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Y_{i,j} - Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,j} + Y_{\bullet,\bullet})^2 .$$

On montre alors aisément la relation fondamentale de l'analyse de variance à deux facteurs sans répétition :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_R .$$

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$I-1$
Facteur B	$J-1$
Résiduelle	$(I-1)(J-1)$
Totale	$IJ-1$

On notera, comme dans le chapitre d'analyse de variance à un facteur, les carrés moyens observés par :

$$s_A^2 = \frac{sc_A}{n_A} \quad ; \quad s_B^2 = \frac{sc_B}{n_B} \quad ; \quad s_R^2 = \frac{sc_R}{n_R}$$

On désire faire les tests d'hypothèses suivantes :

H'$_0$: Les moyennes de la variable *Y* ne sont pas affectées par le facteur A.

$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_i$ ou : $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0$

Contre :

H'$_1$: Les moyennes de la variable *Y* sont affectées par le facteur A. il existe $i \in \{1,2,\ldots,I\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$.

Sous l'hypothèse nulle *H'*$_0$d'absence d'effet du facteur **A** et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, F_A est la réalisation de la variable aléatoire $\frac{S_A^2}{S_R^2}$ qui suit une **loi de Fisher-Snedecor** à $\mathbf{I-1}$et $\mathbf{(I-1)(J-1)}$degrés de liberté.

On peut alors conclure et prendre une décision grâce à la valeur critique (tabulée).
On rejette l'hypothèse nulle si la statistique $\boldsymbol{F_A}$est **supérieure ou égale** à la **valeurcritique** issue de la table.

Nous pouvons répéter tout ce qui précède pour le facteur B.

On peut souhaiter tester les hypothèses suivantes :
H''$_0$: Les moyennes de la variable *Y* ne sont pas affectées par le facteur B.

$\boldsymbol{\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_j}$ ou : $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0$

Contre :

H''$_1$: Les moyennes de la variable *Y* sont affectées par le facteur B. il existe $j \in \{1,2,\ldots,J\}$ tel que $\beta_j \neq 0$.

Sous l'hypothèse nulle H''_0d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, F_B est la réalisation de la variable aléatoire $\frac{S_B^2}{S_R^2}$ **qui suit une loi de Fisher-Snedecor à ϑ −1 et (I−1)(ϑ −1)** degrésde liberté.
On peut alors conclure et prendre une décision grâce à la valeur critique (tabulée).
On rejette l'hypothèse nulle si la statistique F_B**supérieure ou égale** à la **valeur critique** issue de la table.
Le tableau d'analyse de la variance à deux facteurs résume les étapes ci-dessous :

Source	Variations	d.d.l.	Carrés moyens	F	Décision
Facteur A	sc_A	I-1	$s_A^2 = \frac{sc_A}{n_A}$	$F_A = \frac{s_A^2}{s_R^2}$	H_0' ou H_1'
Facteur B	sc_B	J-1	$s_B^2 = \frac{sc_B}{n_B}$	$F_B = \frac{s_B^2}{s_R^2}$	H_0'' ou H_1''
Résiduelle	sc_R	(I-1)(j-1)	$s_R^2 = \frac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	IJ-1			

Tableau d'analyse de la variance à deux facteurs (sans interaction)

Exercice 01 :

L'influence d'un traitement grossissant, à base de vitamines, est étudiée sur des animaux de races différentes. Pour cela nous disposons d'animaux de trois races, notées P_ι , pour ι = 1; 2; 3, et nous avons effectué trois traitements, notés Δ_φ , pour φ = 1; 2,3, utilisant respectivement 5, 10 et 15υg de vitamines B12 par cm^3.
Le gain moyen de poids par jour est mesuré, à l'issue d'un traitement de 50 jours dans chaque cas. Un seul animal est utilisé pour chaque couple « race-traitement ».

Traitement \ Race	R_1	R_2	R_3
D_1	1,26	1,21	1,19
D_2	1,29	1,23	1,23
D_3	1,38	1,27	1,22

- Faire le test qui convient.