

Chapitre 04 – Suite-:

L'analyse de variance à deux facteurs avec interaction

= (ANOVA à deux facteurs avec interaction) :

Ce type d'ANOVA permet de tester, en plus de l'effet isolé de chacun des facteurs, l'effet de l'interaction des deux facteurs. Pour cela il faut disposer de plusieurs mesures pour chaque combinaison de niveaux, c'est-à-dire dans chaque cellule.

		Critère B		
		1	...	\bar{J}
Critère A	1	1	1	1
	
		k	k	k
	...	1	1	1
	
		k	k	k
I	1	1	1	
	
	k	k	k	

Nous noterons **N** le nombre total de mesures effectuées (d'observations):

$$N = I \times J \times K$$

Pour cela, on introduit le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j,k} \quad , \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K.$$

avec les contraintes supplémentaires :

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^J \beta_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^I \gamma_{i,j} = 0, \forall j \in \{1, \dots, J\} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^J \gamma_{i,j} = 0, \forall i \in \{1, \dots, I\}.$$

On a introduit ici un terme d'interaction $\gamma_{i,j}$ qui représente l'interaction entre les deux facteurs.

$\gamma_{i,j,k}$ est la valeur prise par la variable réponse Y dans les conditions $(A_i; B_j)$ lors du k -ième essai.

Il y a donc $N = I \times J \times K$ variables aléatoires $\gamma_{i,j,k}$ dans le tableau ci-dessus.

On supposera toujours réalisées les hypothèses standards suivantes :

1. $\varepsilon_{i,j,k}$ et $\varepsilon_{l,m,n}$ sont indépendantes si $(i, j, k) \neq (l, m, n)$ avec $1 \leq i, l \leq I$, $1 \leq j, m \leq J$ et $1 \leq k, n \leq K$.
2. $\forall (i, j, k), i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; \mathcal{L}(\varepsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Les résultats permettent de tester trois séries d'hypothèses:

H_0^A : Les moyennes de la variable Y ne sont pas affectées par le critère A.

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i$$

H_0^B : Les moyennes de la variable Y ne sont pas affectées par le critère B.

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_j$$

H_0^{AB} : Les critères A et B n'interagissent pas sur les moyennes.

On garde les mêmes notations de la section précédente:

SC = Somme des carrés des écarts

- Variation théorique totale = $SC_T = SCE_A + SCE_B + SC_R + SC_{interaction}$
- Variation théorique résiduelle (“due aux erreurs”) = SC_R
- Variation théorique due aux facteurs A ou B = SC_A ou SC_B
- Variation théorique des cellules = $SC_{interaction} = SC_{AB}$

On calcule les quantités suivantes :

$C = \frac{T^2}{IJK}$, où **T** est la somme de toutes les observations.

Puis, on dresse le tableau suivant :

	SC	ddl	S^2	F
Facteur A	$\frac{\sum_I T_{A_i}^2}{JK} - C$	I-1	$\frac{SCA}{I-1}$	$F_A = \frac{S_A^2}{S_R^2}$
Facteur B	$\frac{\sum_j T_{B_i}^2}{IK} - C$	J-1	$\frac{SCB}{J-1}$	$F_B = \frac{S_B^2}{S_R^2}$
Résiduelle	$\frac{\sum_I \sum_J \sum_K Y_{i,j}^2}{K} - \frac{\sum_I \sum_J y_{i,j}^2}{K}$	IJ(K-1)	$\frac{SCR}{IJ(K-1)}$	
Interaction entre A et B	$\frac{\sum_I \sum_J y_{i,j}^2}{K} - C$	(I-1)(J-1)	$\frac{SCinter}{(I-1)(J-1)}$	$F_{inter} = \frac{S_{AB}^2}{S_R^2}$
Totale	SCE_A + SCE_B + SC_R + SC_{inter}	IJK-1		

Exercice 01: Le régime miracle !

On désire quantifier l'efficacité de trois types de régimes, de quatre intensités d'activité physique ainsi que l'interaction de ces deux critères sur la perte de poids.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
Régime 1	7	15	12	1
	12	21	14	4
	5	13	8	3
	8	12	11	7
	12	9	10	8
	6	12	12	5
Régime 2	5	13	14	4
	21	15	12	12
	12	12	13	8
	8	16	15	9
	10	17	9	11
	9	14	10	9
Régime 3	4	14	15	12
	6	17	16	10
	3	17	12	8
	4	18	9	11
	6	20	8	9
	4	21	17	8

- Quel est l'effet du régime, de l'exercice physique ainsi que de leurs interaction sur la perte de poids ?