Fonctions Harmoniques

Ce cours est déstiné aux étudiants de 2^e année licence mines
($Maths$ 4)

April 16, 2020

Dans ce cours, on effectue quelques rappels sur les fonctions harmoniques définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^2$, qui satisfont par définition $\Delta f = 0$ où

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ est l'opérateur Laplacien.

1 Définitions et résultats fondamentaux

Soient E un ouvert dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}(z_0, r)$ un disque ouvert centré en z_0 et de rayon r .

Définition 1 *Une fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^2$ si ses dérivées partielles secondes*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

existent et sont continues.

Exemple 2 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + 2xy^3 + 4$.*
Calculer toutes les dérivées partielles de f.
f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4x^3 + 2y^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2\ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6y^2 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 6xy^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12xy\ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6y^2.
\end{aligned}$$

Définition 3 *Une fonction f de deux variables réelles définie dans un ouvert E est dite harmonique dans E, si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et satisfait l'équation de Laplace*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exemple 4 *Soit $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$,*
comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x + 2y \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2y + 2x \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2 \\
&\Longrightarrow \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

donc f est harmonique.

Proposition 5 *Soit $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ une fonction holomorphe.*
Si P et Q sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ alors P et Q sont harmoniques, de plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}(x,y) \\
&\text{et} \\
\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}(x,y).
\end{aligned}$$

Exemple 6 *Soit $f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$,*
posons $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$
où $P(x,y) = x^3 - 3xy^2$ et $Q(x,y) = 3x^2y - y^3$
et comme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 6x \\
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -6xy \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -6x \\
&\Longrightarrow \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0
\end{aligned}$$

donc P est harmonique.
De plus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}(x,y) = -6y \\
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -6xy \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x,y) = -6y \\
&\Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}(x,y).
\end{aligned}$$

De même manière, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 6xy \Longrightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) = 6y \\
\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y) = -6y \\
&\Longrightarrow \Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y) = 0
\end{aligned}$$

donc Q est harmonique.
De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 6xy \Longrightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x \\
\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x \\
&\Longrightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}(x,y).
\end{aligned}$$

1.1 Fonctions harmoniques conjuguées

Si $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est une fonction holomorphe dans E, alors P et Q sont harmoniques dans E.

Exemple 7 *La fonction $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors les fonctions*

$$P(x,y) = x^2 - y^2 \text{ et } Q(x,y) = 2xy$$

sont nécessairement harmoniques dans $\mathbb{C}$, en effet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= 2x \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 2 \ et\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -2 \\
&\Longrightarrow \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 2y \Longrightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) = 0 \ et\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -2x \Longrightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\
&\Longrightarrow \Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.
\end{aligned}$$

Si on peut trouver une fonction Q telle que $P(x,y) + iQ(x,y)$ est holomorphe dans E, alors Q sera appelée la fonction harmonique conjuguée de P.

Exemple 8 *Vérifier que la fonction $P(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ est harmonique dans $\mathbb{R}^2$.*

Trouver une fonction harmonique conjuguées de P.

· On a $P(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 6x \ et\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -6xy - 5 \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -6x \\
&\Longrightarrow \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0
\end{aligned}$$

par conséquent, P est harmonique dans $\mathbb{C}$.

· Soit Q une fonction harmonique conjuguée de P,

en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2 ......(1) \\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy + 5.......(2),
\end{aligned}$$

en intégrant l'équation (1) par rapport à y (x fixé), on obtient

$$Q(x,y) = 3x^2 y - 2y^3 + k(x)......(3),$$

en dérivant l'équation (3) par rapport à x et remplaçant dans (2), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 6xy + k'(x) = 6xy + 5 \\ &\Longrightarrow k'(x) = 5 \\ &\Longrightarrow k(x) = 5x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$Q(x,y) = 3x^2y - 2y^3 + 5x + c, \qquad \in \mathbb{R}.$$

Corollaire 9 *Si P et Q sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, harmoniques et conjuguées alors la fonction complexe $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est holomorphe.*

Proposition 10 *Toute fonction holomorphe sur un ouvert E est harmonique sur E.*

Remarque 11 *Les fonctions holomorphes sont non seulement analytiques mais aussi harmoniques.*

Définition 12 *Une fonction f à valeurs complexes est harmonique si et seulement si ses parties réelle et imaginaire soient harmoniques.*

Exemple 13 *Est-ce que la fonction $Q(x,y) = (x^2+1)\,y^2$ peut former la partie imaginaire de la fonction holomorphe $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$?*

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 2xy^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= 2y(x^2+1) \Longrightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y) = 2(x^2+1)\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y) \\ &= 2(x^2+y^2+1) \\ &\neq 0, \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

donc Q n'est pas harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, Q n'est pas une partie imaginaire d'une fonction holomorphe.

Proposition 14 *Soit $P : \mathcal{D}(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction harmonique réelle dans $\mathcal{D}$ alors, il existe une fonction $f : \mathcal{D}(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe dont P est la partie réelle dans $\mathcal{D}(z_0, r)$.*

Exemple 15 *Trouver une fonction holomorphe f dont la partie réelle est*

$$P(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y \text{ avec } f(0) = 0.$$

Puisque f est holomorphe, elle satisfait les conditions de Cauchy-Riemann, i.e

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x} = -6xy - 5 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x}(P + iQ) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ &= \left(3x^2 - 3y^2\right) - i\left(-6xy - 5\right) = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) + 5i \\ &= 3z^2 + 5i \end{aligned}$$

alors

$$f'(z) = 3z^2 + 5i \Longrightarrow f(z) = z^3 + 5iz + c, \quad c \in \mathbb{C}$$

et comme $f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0$.
Donc $f(z) = z^3 + 5iz$.