TD (F. Harmoniques)

Ce TD est déstiné aux étudiants de 2^e année licence mines ($Maths$ 4)

April 14, 2020

Exercice 1 · *Vérifier que la fonction* $P(x,y) = x^2 - y^2 - y$ *est harmonique sur* $\mathbb{C}$.

· *Déterminer une fonction* Q *conjuguée de* P *et les fonctions complexes* f.

Solution

· Soit $P(x,y) = x^2 - y^2 - y$

P est de classe $\mathcal{C}^2$

en effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= 2x \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -2y - 1 \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -2. \end{aligned}$$

P est harmonique car

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) \\ &= 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

· Q est conjuguée de P si

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x \text{............}(1) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y + 1 \text{...........}(2). \end{aligned}$$

En intégrant (1) par rapport à y (x fixé), on obtient

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= 2x\int \mathrm{d}y \\ &= 2xy + k(x).......(3). \end{aligned}$$

En dérivant (3) par rapport à x et en remplaçant dans (2), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 2y + k'(x) = 2y + 1 \\ &\Longrightarrow k'(x) = 1 \\ &\Longrightarrow k(x) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donc les fonctions Q conjuguée de P sont définies par

$$Q(x,y) = 2xy + x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Puisque les fonctions P et Q sont continues sur $\mathbb{R}^2$, alors les fonctions complexes correspondantes

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

sont holomorphes dans $\mathbb{C}$, de plus, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= P(x,y) + iQ(x,y) \\ &= x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) \\ &= (x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + ic \\ &= z^2 + iz + c_1 , \quad c_1 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Exercice 2 · *Vérifier si la fonction $P(x,y) = xy$ est harmonique sur $\mathbb{C}$.*
· *Si oui déterminer les fonctions conjuguées Q correspondantes à P et les fonctions complexes f.*

Solution
· Soit $P(x,y) = xy$
P est de classe $\mathcal{C}^2$
en effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= y \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= x \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0. \end{aligned}$$

P est harmonique car

$$\begin{aligned}\Delta P &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) \\ &= 0+0=0.\end{aligned}$$

$\cdot$ Q est conjuguée de P si

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = y \text{...........}(1) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -x \text{..........}(2).\end{aligned}$$

En intégrant (1) par rapport à y (x fixé), on obtient

$$\begin{aligned}Q(x,y) &= \int y \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{y^2}{2} + k(x) \text{.......}(3).\end{aligned}$$

En dérivant (3) par rapport à x et en remplaçant dans (2), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= k'(x) = -x \\ &\Longrightarrow k(x) = -\frac{x^2}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

donc les fonctions Q conjuguée de P sont définies par

$$Q(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

et de plus,

$$\begin{aligned}f(z) &= P(x,y) + iQ(x,y) \\ &= xy + i\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c\right) \\ &= -\frac{i}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy) + ic \\ &= -\frac{i}{2}z^2 + c_1 \ , \qquad c_1 \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Exercice 3 · *Déterminer α tel que $P(x,y) = e^{3\,x}\cos(\alpha\ y)$ soit harmonique.*
· *Déterminer une fonction Q conjuguée de P.*

Solution

· On a $P(x,y) = e^{3\,x}\cos(\alpha\ y)$

P est de classe $\mathcal{C}^2$ car *exp* et *cos* sont des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= 3e^{3x}\cos(\alpha\ y) \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 9e^{3x}\cos(\alpha\ y) \\
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -\alpha e^{3x}\sin(\alpha\ y) \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -\alpha^2 e^{3x}\cos(\alpha\ y).
\end{aligned}$$

P est harmonique si

$$\begin{aligned}
\Delta P &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\
&\Longrightarrow \left(9-\alpha^2\right) e^{3x}\cos(\alpha\ y) = 0 \\
&\Longrightarrow 9-\alpha^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \alpha = \pm 3.
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 3$ ou $\alpha = -3$, la fonction $P(x,y) = e^{3\,x}\cos(3\ y)$ est harmonique (car *cos* est une fonction paire $\cos(-3\ y) = \cos(3\ y)$).

· Q est conjuguée de P si

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 3e^{3x}\cos(\alpha\ y)............(1) \\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \alpha e^{3x}\sin(\alpha\ y)...........(2).
\end{aligned}$$

En intégrant (1) par rapport à y (x fixé), on obtient

$$\begin{aligned}
Q(x,y) &= 3e^{3x}\int \cos(3y)\ \mathrm{d}y \\
&= e^{3x}\sin(3y) + k(x).......(3).
\end{aligned}$$

En dérivant (3) par rapport à x et en remplaçant dans (2), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 3e^{3x}\sin(3y) + k'(x) = 3e^{3x}\sin(3\ y) \\
&\Longrightarrow k'(x) = 0 \\
&\Longrightarrow k(x) = c, \quad c \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

on prend $c=0$,
donc la fonction Q conjuguée de P est définie par

$$Q(x,y)=3e^{3x}\sin(3\ y).$$

Exercice 4 *Soit* $P:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie par*

$$P(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$$

sous quelles conditions la fonction P *est harmonique.*

Solution
On a $P(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$
P est de classe $\mathcal{C}^2$ car les fonctions polynômiales sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
En effet,

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) & = & 3ax^2+2bxy+cy^2\Longrightarrow\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y)=6ax+2by\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) & = & bx^2+2cxy+3dy^2\Longrightarrow\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y)=2cx+6dy.\end{array}$$

P est harmonique si

$$\begin{array}{rcl}\Delta P & = & 0\Longrightarrow\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y)=0\\ & \Longrightarrow & 6ax+2by+2cx+6dy=0\\ & \Longrightarrow & 2(3a+c)x+2(3d+b)y=0\\ & \Longrightarrow & 3a+c=0 \text{ et } 3d+b=0\\ & \Longrightarrow & c=-3a \text{ et } b=-3d.\end{array}$$