Exemples
1. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ muni de la base (e_1, e_2) par :

$$q(x;y) = 2x^2 + 6y^2 - 4xy$$

La matrice de q dans la base (e_1, e_2) est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminons une base q-orthogonale. Pour cela, décomposons q sous forme de carrés.

$$\begin{aligned} q(x;y) &= 2(x^2 - 2xy) + 6y^2 \\ &= 2[(x-y)^2 - y^2] + 6y^2 \\ &= 2(x-y)^2 - 2y^2 + 6y^2 \\ &= 2(x-y)^2 + 4y^2 \\ &= 2f_1^2 + 4f_2^2 \end{aligned}$$

avec $f_1(x,y) = x - y$, $f_2(x,y) = y$
(f_1, f_2) est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$, cherchons la base q-orthogonale (v_1, v_2) qui vérifie:

$$\begin{cases} f_1(v_1) = 1 \\ f_2(v_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_1(v_2) = 0 \\ f_2(v_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de q dans la base (v_1, v_2) est

$$M = ^t P.A.P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice da passage de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2)
2. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x;y;z) = x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz$$

Déterminons une base q-orthogonale. Pour cela, décomposons q sous forme de carrés.

$$\begin{array}{rcl} q(x;y;z) & = & x^2+6y^2+16z^2-4xy+6xz-16yz \\ & = & (x^2-4xy+6xz)+6y^2+16z^2-16yz \\ & = & (x^2-2x(2y-3z))+6y^2+16z^2-16yz \\ & = & (x-(2y-3z))^2-(2y-3z)^2+6y^2+16z^2-16yz \\ & = & (x-2y+3z)^2-4y^2-9z^2+12yz+6y^2+16z^2-16yz \\ & = & (x-2y+3z)^2+2y^2+7z^2-4yz \\ & = & (x-2y+3z)^2+2(y^2-2yz)+7z^2 \\ & = & (x-2y+3z)^2+2[(y-z)^2-z^2]+7z^2 \\ & = & (x-2y+3z)^2+2(y-z)^2-2z^2+7z^2 \\ & = & (x-2y+3z)^2+2(y-z)^2+5z^2 \end{array}$$

pour déterminer une base q-orthogonale (v_1, v_2, v_3), on pose:

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y+3z=1 \\ y-z=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y+3z=0 \\ y-z=1 \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y+3z=0 \\ y-z=0 \\ z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right. \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on peut déterminer la base q-orthogonale (v_1, v_2, v_3) d'une autre manière si on pose:

$$\left\{\begin{array}{c} X=x-2y+3z \\ Y=y-z \\ Z=z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=X+2Y-Z \\ y=Y+Z \\ z=Z \end{array}\right.$$

Donc une base q-orthogonale (v_1, v_2, v_3) est déterminée par sa matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (v_1, v_2, v_3) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, on aura:

$$\left\{\begin{array}{c} v_1 = e_1 \\ v_2 = 2e_1 - e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{array}\right.$$

2. Mettre sous forme de carrés la forme quadratique de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$q(x;y;z;t) = xy + yz + zt + tx$$

puis déterminer une base q-orthogonale.

$$\begin{array}{rcl} q(x;y;z;t) & = & xy + yz + zt + tx \\ & = & (x+z)(y+t) \\ & = & \dfrac{1}{4}(x+z+y+t)^2 - \dfrac{1}{4}(x+z-y-t)^2 \\ & = & \dfrac{1}{4}(x+z+y+t)^2 - \dfrac{1}{4}(x+z-y-t)^2 + 0z^2 + 0t^2 \end{array}$$

Donc, pour obtenir une base q-orthogonale, on pose

$$\left\{ \begin{array}{c} X = x+z+y+t \\ Y = x+z-y-t \\ Z = z \\ T = t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y - Z \\ y = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y - T \\ z = Z \\ t = T \end{array} \right.$$

Une base q-orthogonale est détermnée par la matrice de passage P, défine par :

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, si on pose

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ v_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_3 \\ v_4 = -e_2 + e_4 \end{array} \right.$$

3. Mettre sous forme de carrés la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$q(x;y;z;t) = xy + xz + xt - yz + yt + 2zt$$

$$
\begin{aligned}
q(x;y;z;t) &= xy+xz+xt-yz+yt+2zt \\
&= (xy+xz+xt-yz+yt)+2zt \\
&= [xy+x(z+t)+y(t-z)]+2zt \\
&= [(x+(t-z))(y+(z+t)-(t-z)(t+z)]+2zt \\
&= \frac{1}{4}[(x+y+2t)^2-(x-y-2z)^2]-(t-z)(t+z)+2zt \\
&= \frac{1}{4}(x+y+2t)^2-\frac{1}{4}(x-y-2z)^2+(z^2+2zt)-t^2 \\
&= \frac{1}{4}(x+y+2t)^2-\frac{1}{4}(x-y-2z)^2+(z+t)^2-2t^2
\end{aligned}
$$

Donc, pour obtenir une base q-orthogonale, on pose:

$$
\left\{\begin{array}{c} X=x+y+2t \\ Y=x-t-2z \\ Z=z+t \\ T=t \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y+Z-2T \\ y=\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}Y-Z \\ z=Z-T \\ t=T \end{array}\right.
$$

Donc une base q-orthogonale est détermnée par la matrice de passage P, défine par :

$$
P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

Donc, si on pose

$$
\left\{\begin{array}{c} v_1=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2 \\ v_2=\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_2 \\ v_3=e_1-e_2+e_3 \\ v_4=-2e_1-e_3+e_4 \end{array}\right.
$$

alors (v_1,v_2,v_3,v_4) est une base q-orthogonale.

4.3 Signature d'une forme bilinéaire symétrique

4.3.1 bases orthonormales

Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie n et f une forme bilinéaire sytmétrique sur E. Une base $(e_1,e_2,...,e_n)$ est une base orthonormale de E, si

$$
\forall i,j\in\{1,2,...,n\}\times\{1,2,...,n\}\,,\ f(e_i,e_j)=\left\{\begin{array}{ll} 1 & ,i=j \\ 0 & ,i\neq j \end{array}\right.
$$

Rermarque

Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie n et f une forme bilinéaire symétrique sur E. On suppoose que f possède une base orthonormale B, alors la matrice de f par rapport à B est égale à la matrice identité, donc f est non dégénérée. La condition f non dégénérée est donc une condition nécessaire pour l'existence d'une base orthonormale.

Nous allons voir par la suite que cette conditon n'est pas toujours suffisante.

Proposition 4.3.1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, possède au moins une base orthonormale.

Proposition 4.3.2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E. Alors f possède une base orthonormale, si, et seulement si,

$$\forall x \in E;\ x \neq 0 \Rightarrow f(x;x) > 0$$

4.3.2 Théorème d'inertie de Sylvestre

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, f une forme bilinéaire symétrique sur E de rang r et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthogonale de E.

Soit p le nombre des $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tels que $f(e_i, e_i) > 0$ et soit q le nombre des $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tels que $f(e_i, e_i) \prec 0$. Alors le couple (p, q) ne dépend pas de la base orthogonale choisie et on a $p + q = r$. Dans ce cas, (p, q) s'appelle la signature de f .