CHAPITRE 3

Normes vectorielles, normes matricielles

Niveau: 1^{er} Année Master

Filière : Mathématiques

Option : Actuariat

Année universitaire : 2019/ 2020

Notation 3.0.1 *Dans ce qui suit:*

1- $\mathbb{k}$ *est le corps* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$,

2- $\mathbb{k}^n$ *est l'espace vectoriel sur* $\mathbb{k}$ *des colonnes à* n *éléments dans* $\mathbb{k}$

3- L'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{k}$, *à* n *lignes et* p *colonnes est noté* $\mathbf{M}_{n,\ m}(\mathbb{k})$. *Il est de dimension* $n \times m$. *Quand* $n = m$, *on le note* $\mathbf{M}_n(\mathbb{k})$.

3.1 Normes Vectorielles

Définition 3.1.1 *Soit* E *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{k}$. *l'application* $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ *définit une norme sur* E *si elle vérifie les conditions suivantes:*

1- $\|v\| = 0$ *si et seulement si* $v = 0$; $\forall v \in E$,

2- $\|\lambda.v\| = |\lambda| \|v\|$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$,

3- $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$; $\forall v_1,\ v_2 \in E$.

Définition 3.1.2 *(Espace verctoriel normé) Le couple* $(E,\ \|.\|)$ *est appelé espace verctoriel normé.*

Exemple 3.1.1 *Sur* $\mathbb{k}^n$ *généralement, on définit les normes usuelles suivantes:*

a. $\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + ... + |v_n| \quad = \sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|$, *b.* $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{\langle v,\ v\rangle},$

c. $\|v\|_p = (|v_1|^p + |v_2|^p + ... + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$

d. $\|v\|_\infty = \max(|v_1|,\ |v_2|, ...,\ |v_n|) = \max_{1\leq i\leq n} |v_i|.$

Théorème 3.1.1 *Soit* $p \in [1,\ +\infty[$. *L'application* $\|.\|_p$ *définie une norme. Et nous remarquons les inégalités suivantes :*

Inégalité de Minkowski

L'inégalité triangulaire :

$$\text{pour } u,\ v \in \mathbb{k}^n,\ \ \|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

est appelée inégalité de Minkowski.

Inégalité de Hölder

Pour p *et* q *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *l'inégalité :*

$$\text{pour } u,\ v \in \mathbb{k}^n,\ \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq \|u\|_p \times \|v\|_p$$

est appelée inégalité de Hölder.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans l'inégalité de Hölder si $p = q = 2$, *on obtient l'inégalité :*

$$\text{pour } u,\ v \in \mathbb{k}^n,\ \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq \|u\|_2 \times \|v\|_2 .$$

Cette dernière est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.1.1 Equivalence de deux normes

Définition 3.1.3 *Soit* $\|.\|$ *et* $\|.\|'$ *deux normes définies sur le même espace vectoriel* E *de dimension finie. On dit que* $\|.\|$ *et* $\|.\|'$ *sont équvalentes, s'il existe* α *et* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que, pour tout* $v \in E$

$$\beta \|v\| \leq \|v\|' \leq \alpha \|v\| .$$

3.2 Normes matricielles

3.2.1 Norme matricielle

Définition 3.2.1 *Une norme matricielle est une application notée* $\|.\| : \mathbf{M}_n(\Bbbk) \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant les propriétés suivantes:*

1- $\|A\| = 0$ *si et seulement si* $A = 0$; *pour toute* $A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$,

2- $\|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|$; *pour toutes* $A,\ B \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$,

3- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$; *pour toutes* $A,\ B \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$.

3.2.2 Norme matricielle subordonnée

Définition 3.2.2 *Soit* $\|.\|$ *une norme vectorielle sur* $E = \Bbbk^n$. *On appelle une norme matricielle subordonnée ou associée à cette norme vectorielle (norme matricielle induite, par cette norme vectorielle) sur* $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$, *toute application notée par*

$$|||.||| : \underset{A \mapsto |||A||| = \sup\limits_{v \in \Bbbk^n,\ \|v\|=1} \|Av\|}{\mathbf{M}_n(\Bbbk) \to \mathbb{R}_+}$$

Proposition 3.2.1 *Si* $|||.|||$ *est une norme matricielle subordonnée, alors on a :*

1- pour toute $A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$, *pour tout* $v \in \Bbbk^n$: $\|Av\| \leq |||A|||\, \|v\|$,

2- pour toute $A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$, *pour tout* $v \in \Bbbk^n$: $|||A||| = \max\limits_{v \in \Bbbk^n,\ \|v\|=1} \|Av\|$,

3- pour toute $A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$, *pour tout* $v \in \Bbbk^n$: $|||A||| = \max\limits_{v \in \Bbbk^n,\ \|v\|=1} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$.

Preuve *Soit* $A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$

1- $\|Av\| \leq |||A|||\, \|v\|$?

Cas 1 : Soit $v \in \Bbbk^n$ *non nul*

On pose : $y = \frac{1}{\|v\|}v$, *alors* $\|y\| = \left\|\frac{1}{\|v\|}v\right\| = 1$, *ce qui implique* $\|Ay\| \leq |||A|||$ *(d'après la définition de la norme* $|||.|||$*).*

En remplaçant $y = \frac{1}{\|v\|}v$, *on obtient*

$$\left\|A\frac{1}{\|v\|}v\right\| \leq |||A|||$$

d'où

$$\frac{\|Av\|}{\|v\|} \leq |||A|||$$

ce qui montre que

$$\|Av\| \leq |||A|||\, \|v\|$$

Cas 2 : Si v est nul

Dans ce cas $Av = 0$ et l'inégalité

$$\|Av\| \leq |||A||| \, \|v\| \text{ est vérifiée.}$$

2- $|||A||| = \max\limits_{v \in \mathbb{k}^n, \ \|v\|=1} \|Av\|$?

Comme l'application $v \mapsto \|v\|$ est continue sur l'ensemble $\{v \in \mathbb{k}^n, \ \|v\| = 1\}$ qui est compact de $\mathbb{k}^n$, donc il existe $v_0 \in \{v \in \mathbb{k}^n, \ \|v\| = 1\}$ tel que :

$$|||A||| = \|Av_0\| = \max_{v \in \mathbb{k}^n, \ \|v\|=1} \|Av\| .$$

3- $|||A||| = \max\limits_{v \in \mathbb{k}^n, \ \|v\|=1} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$?

Si v est non nul, on a

$$\frac{\|Av\|}{\|v\|} = \left\| A \left(\frac{x}{\|v\|} \right) \right\|$$

et

$$\frac{x}{\|v\|} \in \{v \in \mathbb{k}^n, \ \|v\| = 1\}$$

ce qui montre que

$$|||A||| = \max_{v \in \mathbb{k}^n, \ \|v\|=1} \frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

Proposition 3.2.2 *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, \ j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{k})$. Alors :*

1- $|||A|||_1 = \sup \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,

2- $|||A|||_\infty = \sup \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Preuve *1- Pour tout vecteur v, on a :*

$$\begin{aligned}
\|Av\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ v_j \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |v_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \\
&\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|v\|_1
\end{aligned}$$

Maintenant montrons que le nombre $\left(\max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ est le plus petit nombre α pour lequel l'inégalité $\|Av\|_1 \leq \alpha \|v\|_1$ a lieu pour vecteur v.

Construisons un vecteur u tel que:

$$\|Au\|_1 = \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \|u\|_1$$

On considère u de composantes

$$u_i = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j_0 \\ \\ 1 & si\ i = j_0 \end{cases}$$

où j_0 est un indice vérifiant:

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| .$$

2- De la même façon,on a

$$\begin{aligned} \|Av\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \\ &\leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \|v\|_\infty \end{aligned}$$

Maintenant montrons que le nombre $\left(\max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ *est le plus petit nombre* β *pour lequel l'inégalité* $\|Av\|_\infty \leq \beta \|v\|_\infty$ *a lieu pour vecteur* v.

Construisons un vecteur u tel que:

$$\|Au\|_\infty = \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \|u\|_\infty$$

On considère u de composantes

$$u_j = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|} & si\ a_{i_0 j} \neq 0 \\ \\ 1 \quad si\ a_{i_0 j} = 0 \end{cases}$$

où i_0 est un indice vérifiant:

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij_0}| .$$

Exemple 3.2.1 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq 2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max(a_{11} + a_{21},\ a_{12} + a_{22}) = \max(4, \ -2) = 4,$$

$$|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max(a_{11} + a_{12},\ a_{21} + a_{22}) = \max(-1,\ 3) = 3.$$

3.3 Rayon spectral

3.3.1 Valeur propre d'une matrice carrée

Définition 3.3.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n et $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que λ une valeur propre de A, s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ telle que*

$$Av = \lambda v.$$

Remarque 3.3.1 *v est appelé vecteur propre de A associé à λ.*

Proposition 3.3.1 *λ est la solution de l'équation*

$$\det(A - \lambda\ I_n) = 0$$

Remarque 3.3.2 *Les valeurs propres de A sont donc les racines du polynôme $P_A(x) = \det(A - x\ I_n)$, appelé polynôme caractéristique de A. C'est un polynôme de degré n, il y a donc n racines dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes). La matrice A a donc n valeurs propres dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes).*

3.3.2 Valeurs propres et matrices définies positives

Proposition 3.3.2 *Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. A est définie positive si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement positives (> 0).*

3.3.3 Matrices semblables

Définition 3.3.2 *Soit A et B deux matrices carrées d'ordres n. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice inevsible notée P telle que*

$$A = P^{-1} \times B \times P.$$

Proposition 3.3.3 *Si A est une matrice carrée symétrique alors toutes ses valeurs propres sont réelles et il existe une matrice orthogonale P telle que :*

$$P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ 0 & 0 & .... & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

où $P^{-1} = P^T$, les λ_i sont les valeurs propres de A.

A est donc semblable à la matrice diagonale D.

Exemple 3.3.1 *Soit la matrice carrée d'ordre 3*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$$

On a

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \det(A - x\ I_3) \\ &= (x-2)(x+1)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Les vecteurs propres associés sont

<u>Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$</u> (une valeur propre double)

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \ (A + I_3)\, v = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} \\ &= \{(x_1,\ x_2,\ x_3) : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \mathit{Vect}\ \{(-1,\ 0,\ 1),\ (1,\ -2,\ 1)\} \end{aligned}$$

Pour $\lambda_3 = 2$

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \ (A - 2I_3)\, v = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} \\ &= \{(x_1,\ x_2,\ x_3) : \ x_1 = x_2 = x_3\} \\ &= \mathbb{R}\ (1,\ 1,\ 1) \end{aligned}$$

Si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *on a* $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.3.3 *Si on prend* $P' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, *on a* $P'^{-1} = P^T$, *et on a*

$$P^T AP' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.3.4 *Deux matrices semblables ont même trace.*

3.3.4 Rayon spectral

Définition 3.3.3 *Le rayon spectral noté $\rho(A)$ est le plus grand module des valeurs propres de A, et on écrit*

$$\rho(A) = \max \{|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \text{ valeur propre de } A\}\,.$$

3.3.5 Approximation du rayon spectral par une norme matricielle

Théorème 3.3.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n, alors pour toute norme matricielle, (subordonnée ou non) on a:*

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Preuve *Soit λ une valeur paropre de A telle que: $\rho(A) = |\lambda|$. Il existe une vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$ tel que :*

$$Av = \lambda v.$$

Puisque X est non nul, alors il existe un vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$v \times v_1^T \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

D'après la définition de la nome matricielle, on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho(A)\left\|v \times v_1^T\right\| &= |\lambda|\left\|v \times v_1^T\right\| \\
&= \left\|(\lambda v) \times v_1^T\right\| \\
&= \|(Av) \times v\| \\
&= \left\|A\left(v \times v_1^T\right)\right\| \\
&\leq \|A\|\left\|v \times v_1^T\right\|
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Théorème 3.3.2 *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,\ j\leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{k})$ et $\forall \varepsilon > 0$. Il existe une norme matricielle subordonnée $|||.|||$ telle que :*

$$|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$

Preuve *Exercice.*

Proposition 3.3.4 *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,\ j\leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{k})$. Alors :*

$$|||A|||_2 = \sup \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^* \times A)} = |||A^*|||_2.$$

Preuve *Exercice.*

3.3.6 Norme de Frobenius

Théorème 3.3.3 *L'application*

$$\|.\|_F : \underset{A \mapsto \|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{Tr(A^* \times A)}}{\mathbf{M}_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{R}_+}$$

est une norme matricielle non subordonnée invariante par transformation unitaire et appelée norme de Frobenius. Elle vérifie :

$$\text{pour toute } A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{k}), \quad |||A|||_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\, |||A|||_2 .$$

3.4 Inversion de matrice

Théorème 3.4.1 *On désigne par I_n la matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$*

1- Soit $\|.\|$ une norme matricielle induite sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $\|A\| < 1,$ alors la matrice $I_n + A$ est inversible et

$$\left\|(I_n + A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

2- Si $I_n + A$ est singulière (non inversible), alors $\|A\| \ge 1$, pour toute norme matricielle $\|.\|$.

Preuve *1-* $\left\|(I_n + A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|A\|}$?

On a :

$$(I_n + A)\, v = 0 \Rightarrow \|v\| = \|Av\| \le \|A\|\, \|v\|$$

Comme $\|A\| < 1,$ on a :

$$\|v\| = 0$$

ce qui implique $I_n + A$ est inversible.

Comme

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - A\,(I_n + A)^{-1}$$

on a

$$\begin{aligned} \left\|(I_n + A)^{-1}\right\| &= \left\|I_n - A\,(I_n + A)^{-1}\right\| \\ &\le 1 + \|A\| \times \left\|(I_n + A)^{-1}\right\| \end{aligned}$$

ce qui implique

$$(1 - \|A\|) \times \left\|(I_n + A)^{-1}\right\| \leq 1$$

donc

$$\left\|(I_n + A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

2- Si $I_n + A$ est singulière (non inversible), alors $\|A\| \geq 1$, pour toute norme matricielle $\|.\|$?

Puisque $I_n + A$ est singulière, alors $\det(I_n + A) = 0$, *ceci est équivalent à $\lambda = -1$ est une valeur propre de A.*

Soit $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda$ valeur propre de $A\},$ alors :

$$1 \leq \rho(A) \leq \|A\|.$$

Corollaire 3.4.1 *Toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.*

3.5 Suites de vecteurs et de matrices

Proposition 3.5.1 *Soit $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{k})$. Les conditions suivantes sont équivanlentes:*

(i) $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} B^k = 0,$

(2i) pour tout $v \in \mathbb{k}^n$, $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} B^k v = 0,$

(3i) $\rho(B) < 1,$

(4i) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle.

Preuve $(i) \Longrightarrow (2i)$?

Soit $\|.\|$ une norme vectorielle et $|||.|||$ la norme matricielle subordonnée. Alors

$$\forall k \geq 0,\ \forall v \in \mathbb{k}^n,\ 0 \leq \left\|B^k v\right\| \leq \left|\left|\left|B^k\right|\right|\right| \|v\|.$$

Par passage à la limite avec $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} \left|\left|\left|B^k\right|\right|\right| = 0,$ *on obtien*

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left\|B^k v\right\| = 0$$

et donc

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} B^k v = 0$$

$(2i) \Longrightarrow (3i)$?

Supposons que

$$\rho(B) \geq 1 \text{ (par contraposée)}$$

Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{k}$ *tel que* $|\lambda| \geq 1$ *et un vecteur* $v \in \mathbb{k}^n,\ v \neq 0$ *tel que*

$$Bv = \lambda v$$

Par récurrence $\forall k \geq 1,$ *on montre que*

$$B^k v = B^k (Bv) = \lambda B^{k-1} v = ... = \lambda^k v$$

donc, pour toute norme vectoriel, on a

$$\left\| B^k v \right\| = |\lambda|^k \|v\|$$

Or

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} |\lambda|^k = +\infty \text{ ou } 1 \text{ (car } |\lambda| \geq 1)$$

donc

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} B^k v \neq 0$$

ce qui contredit $\lim_{k \longrightarrow +\infty} B^k v = 0.$

D'où $(2i) \Longrightarrow (3i)$

$(3i) \Longrightarrow (4i)$?

On a $\rho(B) < 1,$ *alors*

$$1 - \rho(B) > 0.$$

Posons

$$\varepsilon = \frac{1 - \rho(B)}{2} > 0.$$

D'après le Théorème (2.3), il existe une norme matricielle subordonnée telle que

$$\begin{aligned} \|B\| &\leq \rho(B) + \varepsilon \\ &= \rho(B) + \frac{1 - \rho(B)}{2} \\ &= \frac{1 + \rho(B)}{2} < 1. \end{aligned}$$

D'où $(3i) \Longrightarrow (4i)$.

$(4i) \Longrightarrow (i)$?

Par récurrence, nous pouvons montrer qu'on a ,$\forall k \geq 1$

$$\left\|B^k\right\| \leq \|B\| \left\|B^{k-1}\right\| \leq .... \leq \|B\|^k .$$

Puisque $\|B\| < 1$, *donc*

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \|B\|^k = 0$$

ce qui montre que

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} B^k = 0.$$