

Département de Génie Mécanique – Université Badji Mokhtar
Annaba

Travaux dirigés « Méthode des volumes finis » pour les
étudiants de **Master I - Énergétique**

Responsable du module: Dr **F. MECHIGHEL**

TD

*Résolution du problème de **conduction de la chaleur** unidimensionnelle stationnaire par la méthode des volumes finis*

Exercice I

Considérons le problème de la conduction de chaleur **sans source** dans une barre AB isolée dont les extrémités sont respectivement maintenues à des températures constantes de $T_A = 100\text{ °C}$ et $T_B = 500\text{ °C}$.

- 1- Écrire l'équation qui régit le problème unidimensionnel en régime permanent
- 2- Calculer la distribution de température en régime permanent dans la barre par la méthode des volumes finis.

On donne :

La conductivité thermique $k = 1000\text{ W/m K}$ et la surface (aire) de section transversale $A = 0,01\text{ m}^2$.

Remarque : Il est demandé de faire choisir deux cas de maillage composés de 5 et 7 volumes de contrôle.

Solution

Nous voulons résoudre le problème de conduction en régime stationnaire dans une géométrie 1D (la barre AB montrée en [Fig. I-1](#))

1)- Modélisation du problème

Le présent problème physique est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{I-1})$$

Noter que terme source dans cette équation est nul.

2)- Résolution du problème par la méthode des volumes finis

Pour la résolution du présent problème par la méthode nous allons entamer les étapes suivantes :

Étape 1: Génération de maillage

a)- Nous divisons la longueur de la barre en **cinq** volumes de contrôle égaux comme le montre la Fig. I-1. Cela donne $\delta x = 0,1$ m. Alors, le maillage se compose donc de **cinq** nœuds.

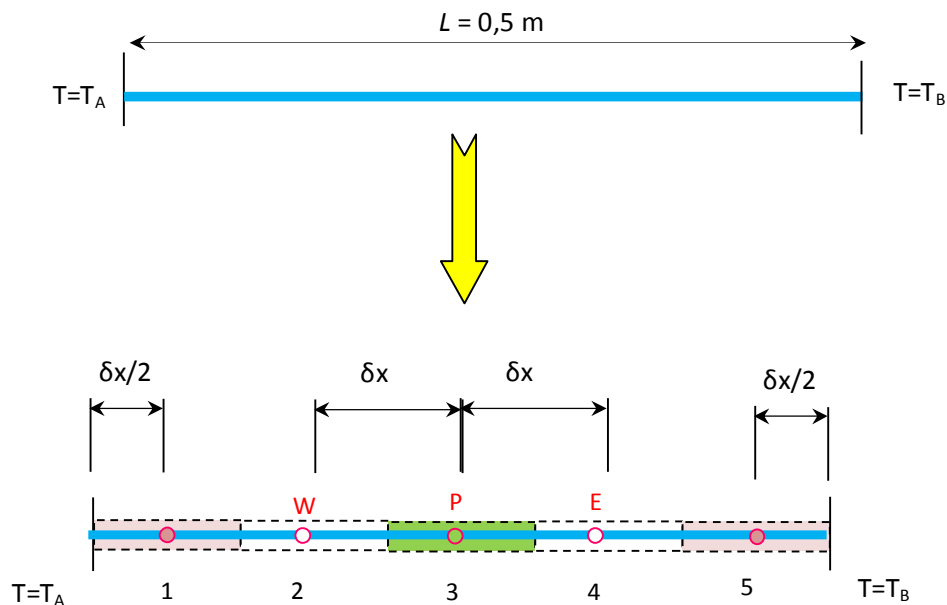


Figure I-1 : Problème de la conduction de la chaleur 1D en régime stationnaire : (a) Domaine et (b) maillage en volumes de contrôles. Cas de maillage constitué de 5 éléments (volumes de contrôle).

Étape 2: Discrétisation

- Nœuds internes

Pour chacun des nœuds 2, 3 et 4, des valeurs de température à l'est et à l'ouest sont disponibles en tant que valeurs nodales. Par conséquent, des équations discrétisées de la forme (3.10) (voir cours) peuvent être facilement écrites pour les volumes de contrôle entourant ces nœuds :

$$\left[\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} - S_p \right] \phi_P = \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \phi_E + S_u \quad (\text{voir cours}) \quad (3.10)$$

Mais ici $\phi = T$ et $\Gamma = k$ alors l'équation (3.10) prend la forme suivante :

$$\left[\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} - S_p \right] T_P = \left(\frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) T_W + \left(\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) T_E + S_u \quad (I-2)$$

Dans le présent modèle mathématique le terme source est nul. Alors en absence de source, on a $S_u = 0$ et $S_p = 0$, l'équation précédente devient :

$$\left[\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right] T_P = \left(\frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) T_W + \left(\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) T_E \quad (I-3)$$

Les conductivités thermiques ($k_e = k_w = k = 1000 \text{ W/m K}$), l'espacement des nœuds ($\delta x = 0,1 \text{ m}$) et l'aire de la section transversale ($A_e = A_w = A = 0,01 \text{ m}^2$) sont des constantes. Par conséquent, les équations **discrétisées** pour les points nodaux 2, 3 et 4 sont :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E \quad (1-4)$$

où

$$\begin{cases} a_W = \left(\frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) = \left(\frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_E = \left(\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) = \left(\frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_P = \left[\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right] = 2 \left(\frac{k A}{\delta x} \right) = a_W + a_E \end{cases} \quad (1-5)$$

Noter que les termes source S_u et S_p sont nuls dans ce cas car aucune source n'est prise en compte dans le modèle mathématique (absence de source de chaleur).

- Traitement des nœuds aux limites

Les nœuds 1 et 5 sont des nœuds limites (frontières) et nécessitent donc une **attention particulière**.

- **Point 1**

L'intégration de l'équation PDE qui régit la **conduction** sur le volume de contrôle entourant le point « 1 » (voir Fig. I-2) donne :

$$k A \left[\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right] - k A \left[\frac{T_P - T_A}{\delta x/2} \right] = 0 \quad (I-6)$$

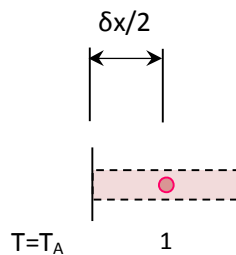


Fig. I.2 :

Cette expression montre que le flux passant par la limite de volume de contrôle A a été approximé en supposant une relation **linéaire** entre les températures au point limite A et le nœud P . Nous pouvons réorganiser l'équation précédente comme suit :

$$\left(\frac{kA}{\delta x} + 2\frac{kA}{\delta x}\right)T_P = 0T_W + \left(\frac{kA}{\delta x}\right)T_E + \left(2\frac{kA}{\delta x}\right)T_A \quad (\text{I-7})$$

En comparant cette dernière équation à l'équation (I-2) ci-dessus, ou plus précisément à

$$\left[\frac{kA}{\delta x} + \frac{kA}{\delta x} - S_p\right]T_P = \left(\frac{kA}{\delta x}\right)T_W + \left(\frac{kA}{\delta x}\right)T_E + S_u \quad (\text{I-2b})$$

On peut facilement identifier que la **condition aux limites** de température spécifiée (fixe) « conditions de Dirichlet » entre dans le calcul en tant que terme source ($S_u + S_p T_P$) avec $S_u = (2kA/\delta x)T_A$, $S_p = -2kA/\delta x$ et $a_W = 0$ (c.-à-d. le lien vers le côté des limites (ouest) a été supprimé).

Finalement l'équation (I-7) peut être exprimée sous la même forme que (3.11) (**voir cours**) pour produire l'équation discrétisée pour le **nœud frontière 1** :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (3.11)$$

Dans notre cas $\phi = T$ et $\Gamma = k$, alors l'équation (3.11) devient :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \quad (\text{I-8})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} a_w = 0 \\ a_E = \left(\frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_P = a_w + a_E - S_p = \left(\frac{k A}{\delta x} \right) + \left(\frac{2k A}{\delta x} \right) = \left(3 \frac{k A}{\delta x} \right) \\ S_p = -\frac{2k A}{\delta x} \\ S_u = \frac{2k A}{\delta x} T_A \end{array} \right. \quad (I-9)$$

- **Point 5**

Le volume de contrôle entourant le nœud 5 peut être traité de manière similaire. Son équation discrétisée est obtenue par l'intégration de l'équation (I-1) sur le volume de contrôle entourant le point « 5 » (voir Fig. I-3) :

$$k A \left[\frac{T_B - T_P}{\delta x/2} \right] - k A \left[\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right] = 0 \quad (I-10)$$

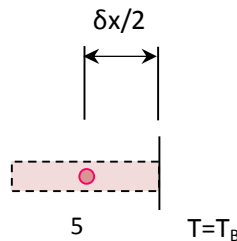


Fig. I-3

Comme précédemment, nous supposons une distribution de température **linéaire** entre le nœud P et le point limite B pour approximer le flux de chaleur à travers la face (limite) du volume de contrôle. L'équation précédente peut être réorganisée comme

$$\left(\frac{k A}{\delta x} + 2 \frac{k A}{\delta x} \right) T_P = \left(\frac{k A}{\delta x} \right) T_W + 0 T_E + \left(2 \frac{k A}{\delta x} \right) T_B \quad (I-11)$$

L'équation discrétisée pour le nœud frontière 5 est

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u \quad (\text{I-12})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} a_w = \left(\frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_e = 0 \\ a_p = a_w + a_e - S_p = \left(\frac{k A}{\delta x} \right) + \left(\frac{2k A}{\delta x} \right) = \left(3 \frac{k A}{\delta x} \right) \\ S_p = -\frac{2k A}{\delta x} \\ S_u = \frac{2k A}{\delta x} T_B \end{array} \right. \quad (\text{I-13})$$

- Application numérique

Le processus de discrétisation a donné une équation pour chacun des points nodaux 1 à 5. La substitution des valeurs numériques donne $(k A / \delta x) = 100$ et les coefficients de chaque équation discrétisée peuvent facilement être déterminés. Leurs valeurs sont données telles que :

Nœud / coefficients	a_w	a_e	S_u	S_p	$a_e = a_w + a_e - S_p$
1 :	0	100	$200 T_A$	-200	300
2, 3 et 4	100	100	0	0	200
5	100	0	$200 T_B$	-200	300

On peut écrire le système d'équations algébriques linéaires à partir de la discrétisation tel que :

$$\begin{cases} 300T_1 = 100T_2 + 200T_A \\ 200T_2 = 100T_1 + 100T_3 \\ 200T_3 = 100T_2 + 100T_4 \\ 300T_4 = 100T_3 + 200T_5 \\ 300T_5 = 100T_4 + 200T_B \end{cases} \quad (\text{I-14})$$

Sous une **forme matricielle** on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{pmatrix} \quad (\text{I-15})$$

Étape 3: Résolution du système d'équations discrétisées

Ce dernier système linéaire peut se résoudre en utilisant la méthode d'élimination de **Gauss** ou l'algorithme de **Thomas** (voir **TP**) et la résolution donne :

$$\begin{cases} T_1 = 140^\circ\text{C} \\ T_2 = 220^\circ\text{C} \\ T_3 = 300^\circ\text{C} \\ T_4 = 380^\circ\text{C} \\ T_5 = 460^\circ\text{C} \end{cases} \quad (\text{I-16})$$

Exercice II

Considérons le problème de conduction de la chaleur dans une grande plaque d'épaisseur $L = 2$ cm avec la **présence d'une source** de chaleur q (voir Fig. II-1).

En supposant que les dimensions dans les directions y et z sont si grandes que les gradients de température ne sont significatifs que dans la direction x . De plus, les faces A et B sont maintenues respectivement à des températures de $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $200\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- 1- Écrire l'équation qui régit le problème unidimensionnel en régime permanent
- 2- Calculer la distribution de température en régime permanent dans la barre par la méthode des volumes finis.

On donne :

La conductivité thermique $k = 0,5\text{ W/m K}$ et la source de génération de chaleur « uniforme » $q = 1000\text{ kW/m}^3$.

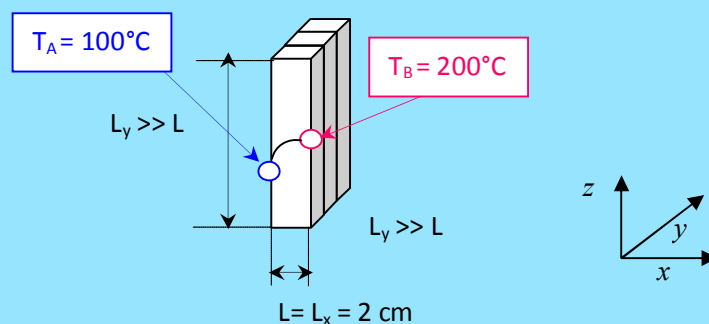


Figure II-1 : Problème de la conduction de la chaleur 1D en régime stationnaire.

Solution

1)- Modélisation du problème

Le présent problème physique est régi par l'équation gouvernante suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + q = 0 \quad (\text{II-1})$$

Noter que terme source dans cette équation n'est pas nul.

2)- Résolution du problème par la méthode des volumes finis

Pour la résolution du présent problème par la méthode nous allons entamer les étapes suivantes :

Étape 1: Génération de maillage

a)- Nous divisons la longueur de la barre en **cinq** volumes de contrôle égaux comme le montre la Fig. II-2. Cela donne $\delta x = 0,004$ m. Alors, le maillage se compose donc de **cinq** nœuds. Une aire unitaire ($A = 1 \text{ m}^2$) est considérée dans le plan $y - z$.

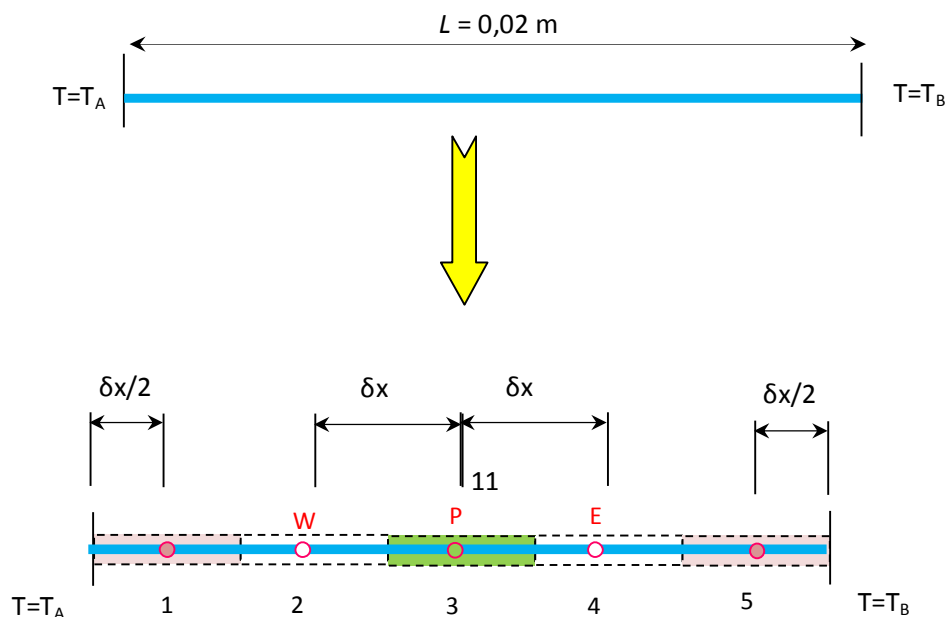


Figure II-2 : Problème de la conduction de la chaleur 1D en régime stationnaire (présence de source de chaleur) : (a) Domaine et (b) maillage en volumes de contrôles. Cas de maillage constitué de 5 éléments (volumes de contrôle).

Étape 2: Discrétisation

- Nœuds internes

L'intégration de l'équation gouvernante (II-2) sur un volume de contrôle typique donne

$$\int_{V_{cv}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + q \right) dV = \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] dV + \int_{\Delta V} q dV = 0 \quad (\text{II-2})$$

Alors

$$\left[kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_e - \left[kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w + q \Delta V = 0 \quad (\text{II-3})$$

avec ΔV est le volume du volume de contrôle : $\Delta V = A \delta x$.

Noter que dans la seconde intégrale dans l'équation (II-3), le terme source a été évalué en calculant la génération moyenne (c'est-à-dire $\bar{S} \Delta V = q \Delta V$) dans chaque volume de contrôle.

En poursuivant la même démarche que celle dans l'exercice I, on a

$$\left(k_e A_e \frac{(T_E - T_P)}{\partial x_{EP}} \right) - \left(k_w A_w \frac{(T_P - T_W)}{\partial x_{PW}} \right) + q A \delta x = 0 \quad (\text{II-4})$$

Cette dernière équation peut être réorganisée comme

$$\left(\frac{k_e A_e}{\partial x_{EP}} + \frac{k_w A_w}{\partial x_{PW}} \right) T_P = \frac{k_w A_w}{\partial x_{PW}} T_W + \frac{k_e A_e}{\partial x_{EP}} T_E + q A \delta x = 0 \quad (\text{II-5a})$$

Mais $A_e = A_w = A$ et (δx est fixe) alors :

$$\left(\frac{k_w A}{\partial x} + \frac{k_e A}{\partial x} \right) T_p = \left(\frac{k_w A}{\partial x} \right) T_w + \left(\frac{k_e A}{\partial x} \right) T_E + q A \delta x = 0 \quad (\text{II-5b})$$

Cette équation est écrite sous la forme générale :

$$a_p T_p = a_w T_w + a_E T_E + S_u \quad (\text{II-6})$$

D'autre part, puisque $k_e = k_w = k$ alors nous avons les coefficients suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_w = \left(\frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_E = \left(\frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_p = a_w + a_E - S_p = 2 \left(\frac{k A}{\delta x} \right) \\ S_p = 0 \\ S_u = q A \delta x \end{array} \right. \quad (\text{II-7})$$

Les équations (II-6) et (II-7) sont valables pour les volumes de contrôle aux points nodaux **2, 3 et 4**.

- Traitement des conditions aux limites

Les nœuds 1 et 5 sont des nœuds limites et nécessitent donc une attention particulière.

Point 1

Pour incorporer les conditions aux limites aux nœuds 1 et 5, nous appliquons l'approximation linéaire des températures entre un point limite et le point nodal adjacent. Au nœud 1, la température à la limite ouest est connue. L'intégration de l'équation gouvernante au volume de contrôle entourant le nœud 1 donne

$$\left[kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_e - \left[kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w + q \Delta V = 0 \quad (\text{II-8})$$

L'introduction de l'approximation linéaire des températures entre les rendements A et P donne

$$\frac{k_e A}{\partial x} (T_E - T_P) - \left(\frac{k_A A}{\partial x / 2} \right) (T_P - T_A) + q A \delta x = 0 \quad (\text{II-9})$$

L'équation ci-dessus peut être réarrangée, en utilisant $k_e = k_A = k$, pour produire l'équation discrétisée pour le **nœud frontière 1**:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \quad (\text{II-10})$$

avec

$$\begin{cases} a_W = 0 \\ a_E = k A / \delta x \\ a_P = a_W + a_E - S_p = 3k A / \delta x \\ S_p = -2k A / \delta x \\ S_u = q A \delta x + 2(k A / \delta x) T_A \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

Point 5

Le nœud est traité de la même manière que le nœud limite 1. Au point nodal 5, la température sur la face est du volume de contrôle est connue. Alors au point limite 5, nous avons

$$\left[kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_e - \left[kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w + q \Delta V = 0 \quad (\text{II-12})$$

donc

$$\left(\frac{k_B A}{\partial x / 2} \right) (T_B - T_P) - \frac{k_w A}{\partial x} (T_P - T_W) + q A \delta x = 0 \quad (\text{II-13})$$

L'équation (II-13) peut être réorganisée, en notant que $k_B = k_w = k$, pour donner l'équation discrétisée pour le **nœud frontière 5**:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u \quad (\text{II-14})$$

avec

$$\begin{cases} a_w = k A / \delta x \\ a_e = 0 \\ a_p = a_w + a_e - S_p = 3k A / \delta x \\ S_p = -2k A / \delta x \\ S_u = q A \delta x + 2(k A / \delta x) T_B \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

- Application numérique

Le processus de discrétisation a donné une équation pour chacun des points nodaux 1 à 5. La substitution par les valeurs numériques A (unité), $k = 0,5 \text{ W/m K}$; $q = 1000 \text{ kW/m}^3$ et $\delta x = 0,004 \text{ m}$ partout donne les coefficients des équations discrétisées. Leurs valeurs sont données telles que :

Nœud / coefficients	a_w	a_e	S_u	S_p	$a_e = a_w + a_e - S_p$
1 :	0	125	$4000 + 250 T_A$	-250	375
2, 3 et 4	125	125	4000	0	250
5	125	0	$4000 + 250 T_B$	-250	375

Sous une **forme matricielle** on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 + 250 T_A \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 + 250 T_B \end{pmatrix} \quad (\text{II-16})$$

Étape 3: Résolution du système d'équations discrétisées

Ce dernier système linéaire peut se résoudre en utilisant la méthode d'élimination de **Gauss** ou l'algorithme de **Thomas** (voir **TP II**) et la résolution donne :

$$\begin{cases} T_1 = 150^\circ C \\ T_2 = 218^\circ C \\ T_3 = 254^\circ C \\ T_4 = 258^\circ C \\ T_5 = 230^\circ C \end{cases} \quad (\text{II-17})$$