

Département de Génie Mécanique – Université Badji Mokhtar
Annaba

Cours Méthode des volumes finis pour les étudiants de
Master I - Énergétique

Responsable du module: Dr **F. MECHIGHEL**

Chapitre 3 La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion

3.1 Introduction

Nous allons développer la méthode du volume fini (ou méthode des volumes de contrôle), qui est basée sur l'intégration de l'équation générale de transport sur un volume de contrôle typique. Pour commencer, nous allons alors considérer le processus de transport le plus simple : par exemple la **diffusion pure** à l'état stationnaire d'une propriété (quantité de transport) ϕ de fluide.

Notons que le terme « **diffusion** » est souvent utilisé pour désigner le transport ou le transfert de **masse** (exemple la **concentration** d'une espèce (soluté) dans un mélange), alors que lorsqu'il s'agit d'un **transfert de chaleur** il est plus commode d'utiliser le terme « **conduction** ».

3.2 Modélisation mathématique du problème de diffusion pure en régime permanent

Considérons le problème physique de diffusion pure de la quantité ϕ en régime stationnaire montré dans la Fig. 3.1. L'équation différentielle aux dérivées partielles (PDE) qui régit la diffusion stationnaire peut facilement être obtenue de **l'équation générale de transport (2.14)** (voir chapitre 2) pour la propriété ϕ en supprimant les termes transitoire et convectif. Cela donne

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \equiv \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_\phi = 0 \quad (3.1)$$

Conditions aux limites

Les **conditions aux limites** de ce problème sont montrées sur la figure 3.1. En effet, par exemple dans la direction x on a :

$$\text{À } x = 0, \phi = \phi_A \text{ et à } x = L_x \phi = \phi_B$$

En intégrant cette équation sur un volume de contrôle typique (c.-à-d. en appliquant l'équation (2.17)), nous avons :

$$\int_{S_{CV}} \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dS + \int_{V_{CV}} S_\phi dV = 0 \quad (3.2)$$

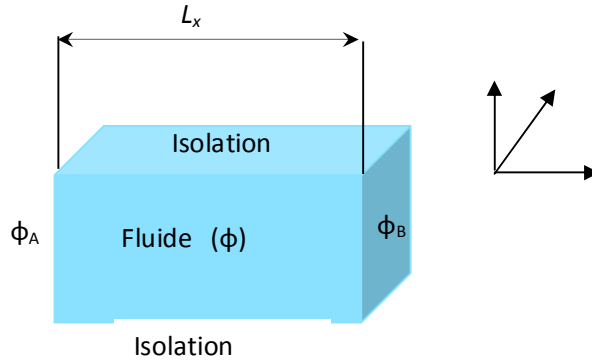


Figure 3.1 : Définition du problème physique (diffusion d'une quantité de transport) dans un domaine 3D en régime permanent. Conditions aux limites imposées au problème.

3.3 Application de la méthode des volumes finis à la résolution du problème de **diffusion unidimensionnelle (1D) en régime permanent**

3.3.1 Modélisation mathématique et conditions aux limites du problème

La diffusion en régime permanent de la propriété, ϕ , dans un domaine unidimensionnel défini dans la Fig. 3.2, est régie par

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \equiv \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_\phi = 0 \quad (3.1)$$

La projection de cette équation dans un domaine 1D (voir Fig.3.2) donne :

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\Gamma \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \phi \right] = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\Gamma \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + S_\phi = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right] + S_\phi$$

Donc pour le problème 1D on a

$$\text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S_\phi = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + S_\phi = \frac{d}{dx} \left[\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right] + S_\phi \quad (3.3)$$

où Γ est le coefficient de diffusion et S_ϕ est le terme source. Des valeurs limites de ϕ aux points A et B (conditions aux limites) sont prescrites (voir Fig. 3.2).

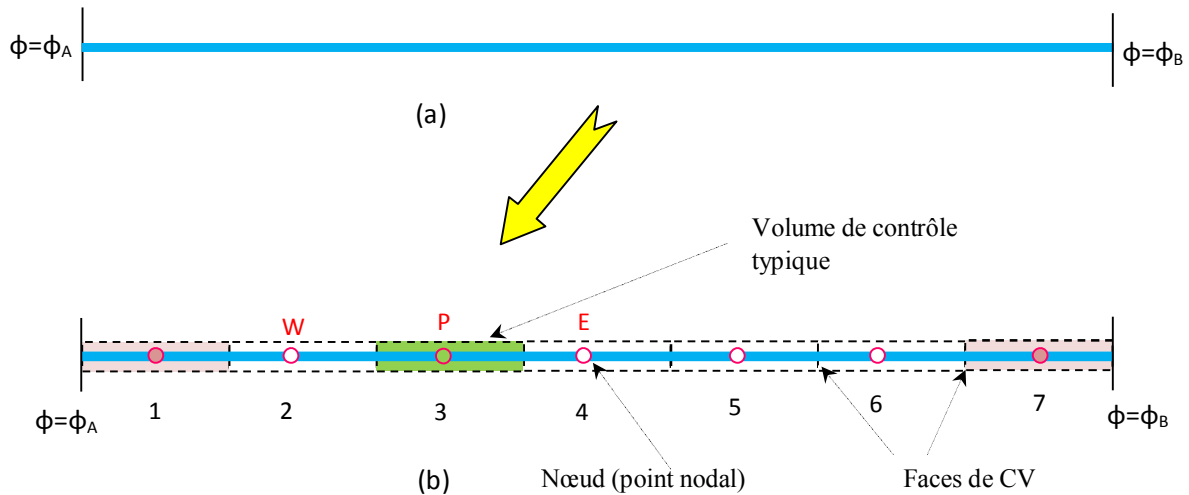


Figure 3.2 : Problème de la diffusion pure 1D en régime stationnaire : (a) Domaine et (b) maillage en volumes de contrôles.

3.3.2 Résolution du problème par la méthode des volumes finis au problème

Appliquons la méthode des volumes finis au problème montré dans la Fig. 3.2 :

Étape 1: Génération de maillage

Comme il est indiqué dans le chapitre 2, la première étape de la méthode des volumes finis consiste à subdiviser le domaine en volumes de contrôle CV **discrets**. En choisissant un certain nombre de **points nodaux (nœuds)** dans l'espace entre A et B. Les **limites** (ou **faces**) des **volumes de contrôle** sont positionnées à mi-chemin entre les **nœuds adjacents**. Ainsi, chaque nœud est entouré d'un **volume de contrôle** (voir Fig. 3.2b). **Noter qu'il est plus commode de configurer des volumes de contrôle près du bord du domaine de telle manière que les limites physiques coïncident avec les limites de volume de contrôle** (voir Fig. 3.2b).

Maintenant, il est conseillé d'établir un système de notation qui peut être utilisé dans tous les développements ultérieurs de la méthode des volumes finis. La convention habituelle est montrée à la figure 3.3.

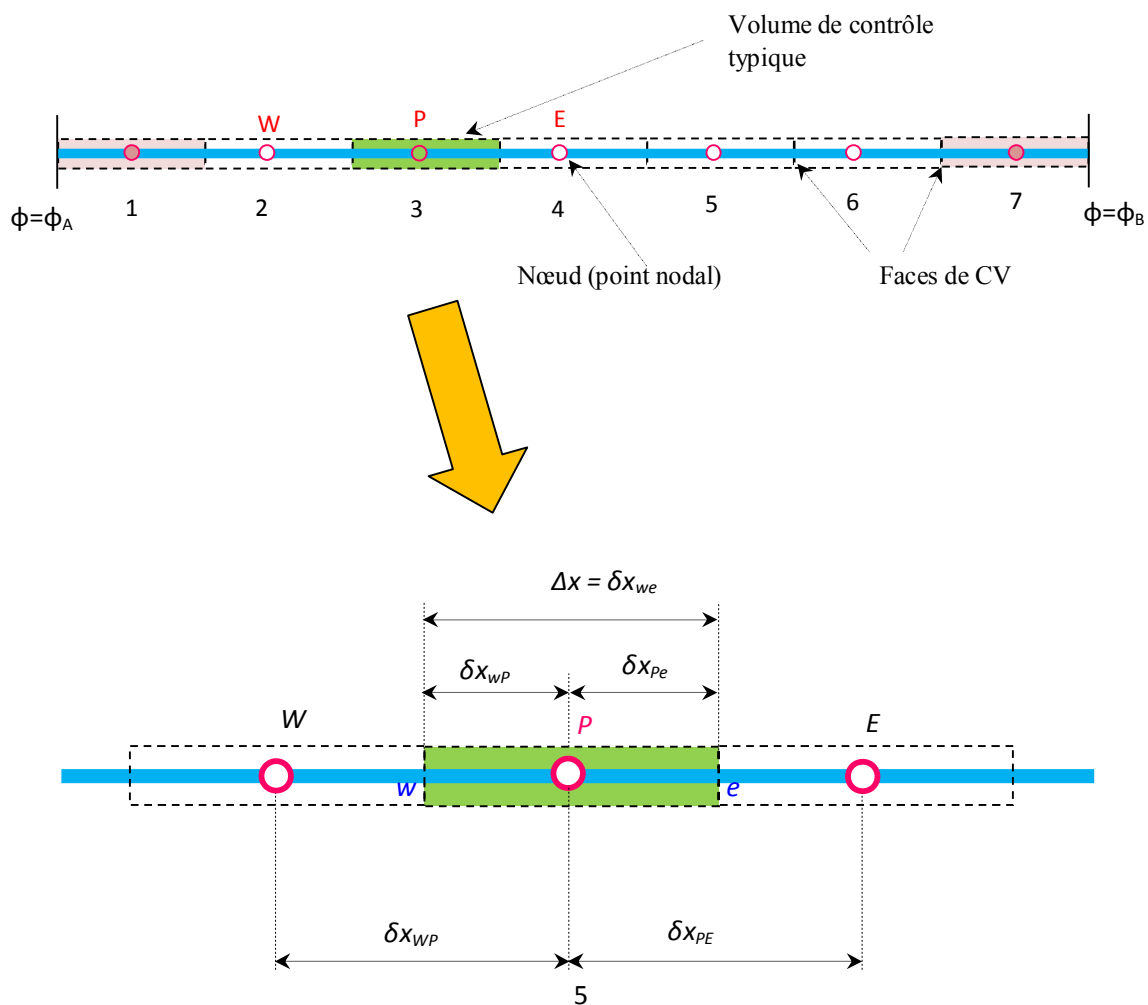


Figure 3.3 : Système de notation utilisé dans la méthode des volumes finis (cas 1D)

Un nœud (point nodal) **typique** est identifié par « P » et ses voisins dans une géométrie unidimensionnelle, les nœuds à l'ouest et à l'est, sont identifiés par « W » et « E » respectivement (voir Fig. 3.2b). La **face** du côté ouest du volume de contrôle est désignée par « w » et la face du volume de contrôle du côté est par « e » (voir Fig. 3.3). Les distances entre les nœuds W et P , et entre les nœuds P et E , sont identifiées respectivement par δx_{WP} et δx_{PE} . De même, les distances entre la face w et le point P et entre P et la face e sont désignées respectivement par δx_{wP} et δx_{Pe} . Finalement la largeur du volume de contrôle est $\Delta x = \delta x_{we}$ (voir Fig. 3.3).

Étape 2: Discrétisation

L'**étape principale** de la méthode des volumes finis est l'intégration de l'équation gouvernante (3.1) sur un volume de contrôle typique pour produire une équation discrétisée à son point nodal P (voir Fig. 3.2 et 3.3). Pour le volume de contrôle défini précédemment (Fig. 3.3), cela donne

$$\int_{V_{CV}} \text{div}(\Gamma \text{ grad} \phi) dV + \int_{V_{CV}} S_\phi dV = \int_{S_{CV}} \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad} \phi) dS + \int_{V_{CV}} S_\phi dV = 0$$

Donc

$$\int_{V_{CV}} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma \frac{d\phi}{dx} \\ 0 \end{pmatrix} dV + \int_{V_{CV}} S_\phi dV = \int_{S_{CV}} \begin{pmatrix} n_e \\ n_w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma \frac{d\phi}{dx} \\ 0 \end{pmatrix} dS + \int_{V_{CV}} S_\phi dV = 0$$

implique

$$\int_{V_{CV}} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{V_{CV}} S_\phi dV = \int_w^e \left[\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \right] dS + \int_{V_{CV}} S_\phi dV = 0$$

alors

$$\int_{V_{CV}} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{V_{CV}} S_\phi dV = \left[\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) S \right]_w^e + \int_{V_{CV}} S_\phi dV = 0$$

Si en désignant S par A , on a alors

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S_{\phi} dV = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V \quad (3.4)$$

Dans cette équation, A est la section transversale de la face du volume de contrôle, ΔV est le volume et $\bar{S}$ est la valeur moyenne de la source S sur le volume de contrôle. Une caractéristique attractive de la méthode des volumes finis est que [l'équation discrétisée](#) a une [interprétation physique claire](#). En effet, l'équation (3.4) indique que le **flux diffusif** de ϕ qui **quitte** la face moins le **flux diffusif** de ϕ qui **pénètre** dans la face ouest est égal à la génération de ϕ , c'est-à-dire qu'il constitue une [équation d'équilibre](#) pour ϕ sur le volume de contrôle typique.

Afin d'obtenir des formes utiles des équations discrétisées, le coefficient de diffusion d'interface Γ et le gradient $d\phi/dx$ à l'est (e) et à l'ouest (w) sont nécessaires. Selon une pratique bien établie, les valeurs de la propriété ϕ et le coefficient de diffusion sont définis et évalués aux points nodaux. Pour calculer les gradients (et donc les flux) au niveau des faces de contrôle, une **distribution approximative** des propriétés entre les points nodaux est utilisée. Les approximations linéaires semblent être le moyen le plus évident et le plus simple de calculer les valeurs d'interface et les gradients. Cette pratique est appelée différenciation centrale. Dans un maillage uniforme, les valeurs interpolées linéairement pour Γ_w et Γ_e sont données par

$$\begin{cases} \Gamma_w = (\Gamma_w - \Gamma_p)/2 \\ \text{et} \\ \Gamma_e = (\Gamma_p - \Gamma_E)/2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Et les termes de flux diffusif sont évalués comme suit

$$\left[\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right]_e = \Gamma_e A_e \left[\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right] \quad (3.6)$$

$$\left[\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right]_w = \Gamma_w A_w \left[\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right] \quad (3.7)$$

Noter que le terme source S peut être une fonction de la variable dépendante, ϕ , dans de tel cas, il est commode de mettre le terme source sous une forme linéaire telle que:

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P \quad (3.8)$$

En remplaçant les équations (3.6), (3.7) et (3.8) dans l'équation (3.4), on a

$$\Gamma_e A_e \left[\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right] - \Gamma_w A_w \left[\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right] + (S_u + S_p\phi_P) = 0 \quad (3.9)$$

Cette dernière peut se réarranger pour donner

$$\left[\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} - S_p \right] \phi_P = \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \phi_E + S_u \quad (3.10)$$

En désignant les coefficients de ϕ_W et ϕ_E dans l'équation (3.11) par a_W et a_E , et le coefficient de ϕ_P par a_P , l'équation (3.11) peut s'écrire :

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{cases} a_P = \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} - S_p \right) = a_E + a_W - S_p \\ a_W = \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \\ a_E = \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

Les valeurs de S_u et S_p peuvent être obtenues à partir de l'expression de la source (3.8) :

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P \quad (3.13)$$

Ce type d'équation discrétisée est au cœur de tous les développements ultérieurs.

Étape 3: Résolution du système d'équations discrétisées

Afin de résoudre le problème de diffusion par la FVM, des équations discrétisées de la forme (3.11) doivent être établies à chacun des points nodaux (nœuds). Pour les volumes de contrôle qui sont adjacents aux limites du domaine, l'équation discrétisée générale (3.11) doit être modifiée pour incorporer les **conditions aux limites**. Le système résultant d'équations algébriques linéaires doit être résolu pour obtenir la distribution de la propriété ϕ aux nœuds. Toute technique de résolution matricielle appropriée peut être utilisée pour cette tâche. En particulier, les procédures de résolution par l'algorithme de Thomas (TDMA) ou la méthode de Gauss-Seidel.

3.4 Résolution du problème de conduction de la chaleur unidimensionnelle stationnaire par la méthode des volumes finis

Nous allons appliquer la méthode des volumes finis à la solution de problèmes de diffusion simples à savoir le **transfert de chaleur par conduction**. L'équation régissant le transfert de chaleur conducteur unidimensionnel en régime permanent est donnée par:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + S = 0 \quad (3.14)$$

où la conductivité thermique k remplace Γ dans l'équation (3.14) et la variable dépendante est la température $\phi = T$. Le terme source peut, par exemple, être la génération de chaleur due à un courant électrique traversant la tige. L'incorporation des conditions aux limites ainsi que le traitement des termes sources seront introduits au moyen des trois exercices suivants.

3.5 Travaux dirigés : Résolution du problème de conduction de la chaleur unidimensionnelle stationnaire par la méthode des volumes finis

Voir série TD

Références bibliographiques:

1. H.K. Versteeg, W. Malasasekera, “Introduction to Computational Fluid Dynamics: The finite volume method (2nd Edition)”, Pearson, Prentice Hall, 2007.
2. S.V. Patankar, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Hemisphere, Washington, DC, 1980.