**La conduction thermique**

***1 Introduction***

On appelle transferts de chaleur, les processus par lesquels de l'énergie est échangée sous forme de chaleur entre des corps ou des milieux à des températures différentes T1 et T2.

La chaleur peut être transmise par *conduction, convection* ou *rayonnement.* Bien que les trois processus puissent avoir lieu simultanément, l'un des mécanismes est généralement prépondérant. Par exemple, la chaleur est principalement transmise par conduction à travers les murs en brique d'une maison; l'eau dans une casserole placée sur une cuisinière est surtout chauffée par convection; la terre reçoit sa chaleur du soleil en grande partie par rayonnement.

La conduction concerne principalement les solides. En effet, bien que présente également dans les liquides et les gaz, elle y est le plus souvent négligeable par rapport à la convection et au rayonnement.

Nous allons introduire les questions essentielles à traiter dans un problème de conduction thermique, en nous appuyant sur l’exemple du système de chauffage de locaux par plancher chauffant électrique direct.

Dans ce mode de chauffage, l’émission de chaleur est produite par effet Joule dans un câble chauffant.



Figure 1 - Coupe d’un plancher chauffant électrique direct

Ce câble chauffant est disposé dans une chape d’enrobage, elle-même placée au dessus d’une couche de matériau isolant. Le rôle de cet isolant est très important, puisqu’il conditionnera la bonne répartition des flux de chaleur émis par le câble chauffant.

Le problème fondamental de la conduction est de trouver la température en tout point de l’épaisseur du plancher, ainsi que la puissance thermique échangée à travers sa surface, afin de résoudre les problèmes de dimensionnement suivants:

a) Connaissant la puissance P à évacuer, déterminer les caractéristiques de la couche isolante pour qu’au moins 90% du flux de chaleur soit ascendant.

b) Vérifier que la température de surface du plancher ne dépasse pas une limite réglementaire Tmax correspondant au confort optimal. [[1]](#footnote-2)

Ces deux problèmes concernent le régime permanent, dans lequel la température en chaque point du plancher est indépendante du temps, ce qui signifie que l’équilibre thermique entre l’énergie fournie au système et les déperditions est atteint.

Mais, il est parfois nécessaire de résoudre des problèmes thermocinétiques, c’est-à-dire en régime variable.

c) On pourra par exemple être amené à vérifier que le temps de mise en température de confort d’un local déterminé n’excède pas une certaine durée contractuelle.

Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire de connaître le mécanisme local du phénomène. Nous verrons que ce mécanisme sera décrit par une équation, dite équation de la chaleur, liant entre elles les différentes grandeurs intervenant ( la température T, le temps t, les variables d’espace x, y, z).

Parmi toute une famille de solutions possibles de l’équation précédente, il faudra retenir celle qui sera compatible avec le respect des conditions existantes aux limites du domaine étudié. Par exemple, la température de surface du câble chauffant doit demeurer constante et égale à une valeur spécifiée par le constructeur du câble. De même, la répartition initiale de température dans le milieu étudié intervient également sur l’évolution ultérieure des températures dans ce milieu.

***2 Concepts fondamentaux***

 2.1 Champs thermiques

Nous venons de considérer un premier champ thermique, qui est un champ scalaire, celui des températures T(M, t), où M(x, y, z) désigne un point quelconque du plancher chauffant considéré. On a vu que ce champ de températures peut être permanent ou variable. On appellera surface isotherme, le lieu des points M ayant la même température à un instant t.

Supposons que le câble chauffant de l’exemple précédent apporte au plancher une quantité de chaleur **dQ** pendant le temps **dt**. Le flux thermique qui va se propager vers le local à chauffer est :

 **Φ = dQ / dt** (1)

(Ce flux est une puissance exprimée en Watt).

Si on suppose la structure du plancher chauffant parfaitement uniforme, on peut se contenter de raisonner sur une surface de plancher unité, et ensuite les résultats obtenus pourront être étendus à toute la surface **S** de ce plancher.

On appellera densité de flux thermique, la puissance échangée par surface unité, c’est-à-dire la grandeur :

 **ϕ = dQ / S dt = Φ / S** (2)

(Cette densité de flux thermique s’exprime en Watt/m2 ).

Mais notre hypothèse d’uniformité du plancher est sans doute trop simpliste. Aussi, renoncerons nous à considérer une seule densité de flux thermique **ϕ** valable en tout point de la surface S du plancher.

Il est nécessaire de passer à une description locale. Pour ce faire, introduisons un champ de vecteurs **** représentant la densité *locale* du flux thermique en chaque point  du plancher chauffant.

Ce vecteur **** caractérise en chaque point du milieu, la direction, le sens et l’intensité du flux de chaleur provoqué par la présence de la source interne.

Le module d’un tel vecteur a la dimension d’une puissance par unité de surface, et s’exprime en W/m2.

Dans l’exemple qui nous sert de support de raisonnement, la direction du flux de chaleur ne fait guère de doute, parce que la géométrie étudiée n’est qu’à 2 dimensions. Mais il sera souvent nécessaire au thermicien de se pencher sur des problèmes en 3D. La direction du flux thermique en un point sera alors en général quelconque.

Si alors, on envisage une surface élémentaire **dS** entourant le point , orienté par sa normale unitaire ****, la direction du flux de chaleur fera un angle **α** avec la normale ****, et le flux élémentaire de chaleur **dΦ** à travers la surface **dS** sera donné par l’expression :

****

Cette quantité représente une énergie par unité de temps, et s’exprime donc en Watt.

On peut faire un parallèle entre le champ de vecteurs *densité de flux* en thermique, et le champ de *vitesses* en mécanique des fluides. Pour chacun de ces deux champs de vecteurs, on peut définir des lignes de courant, qui sont les enveloppes des vecteurs considérés.

Dans chacune des deux disciplines, la mécanique des fluides et la thermique, l’ensemble des lignes de courant s’appuyant sur un contour fermé constitue un tube de courant.

2.2 Loi de Fourier (1822)

Il existe une relation linéaire entre l’effet auquel on s’intéresse, c’est-à-dire la densité de flux thermique  **** et sa cause, qui est l’existence d’un gradient de température ****.

En tout point d’un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantanéeest proportionnelle au gradient de température, ce qui s’écrit :

 **** (3)

Le coefficient de proportionnalité  **λ** s’appelle la conductivité thermique du milieu.

Pour un milieu isotrope et homogène, **λ** ne dépend que de la température **T**. Dans de nombreux cas pratiques, lorsque les écarts de température ne sont pas trop élevés, on peut considérer, avec une précision suffisante, **λ** comme une constante pour un milieu donné.

Par convention, **** est compté positivement dans le sens d’écoulement de la chaleur, c’est-à-dire vers les températures décroissantes. **** est un vecteur porté par le même axe, mais de sens contraire à **** , d’où le signe moins de la loi de Fourier.

**** et  s’expriment en W/m2 .Il en résulte que la conductivité thermique **λ** s’exprimera en W/(m.°C)

 2.2.3 Orthogonalité du gradient et de l’isotherme

|  |  |
| --- | --- |
|  | En un point quelconque M du milieu, on a à tout instant:Si on considère un déplacement élémentaire dM sur l’isotherme passant par M, le long de cette isotherme, on a:  Les vecteurs  et sont donc orthogonaux |

Le gradient de température en chaque point est normal à la surface isotherme passant par ce point.

 Il en résulte que les lignes de courant, auxquelles les vecteurs ‘densité de flux thermique’ sont tangents, sont également normales aux surfaces isothermes.

Les parois d’un tube de courant sont par conséquent normales aux isothermes. Aucun flux ne les traverse donc. Ces parois sont dites adiabatiques.

Ainsi, en régime permanent, le flux thermique est conservatif dans un tube de courant. Cette propriété est l’exacte analogie de la constance du débit dans un tube de courant en mécanique des fluides.

## 3 Conduction en régime permanent

Nous commencerons par raisonner, pour plus de clarté, dans le cadre d’un problème à une seule dimension.

Un tel problème unidimensionnel est connu sous le nom de problème du mur, c’est-à-dire d’un milieu limité par deux plans parallèles, dans lequel la chaleur se propage uniquement suivant la normale à ces plans. Le gradient de température est par conséquent porté par cette normale. Les isothermes sont des plans parallèles aux faces.

Un tel champ thermique est unidirectionnel. Dans ce cas, la température T n’est fonction que de l’abscisse x.

Considérons une paroi d’épaisseur e séparant deux domaines où règnent des températures respectives T1 et T2 , avec T1 supérieure à T2 .



Si le phénomène considéré est en régime permanent, les températures n’évoluent plus. C’est donc que l’on a atteint un régime d’équilibre entre l’apport de chaleur à travers la face chaude de la paroi, et la déperdition de chaleur à travers la face froide:

S . **ϕ 1 =** S . **ϕ 2**

 Flux entrant = Flux sortant

Dans l’hypothèse d’un déséquilibre, si :

**S . ϕ 1 - S . ϕ 2 = S Δ ϕ > 0**

la quantité de chaleur excédentaire **S Δ ϕ** accumulée chaque seconde dans la paroi, estliée aux caractéristiques physiques de cette paroi par l’expression :

 **** (4)

et c’est cette accumulation de chaleur qui entraîne une augmentation de température de la paroi.

Par contre, en régime permanent, on a :

****

ce qui s’intègre immédiatement, pour donner le profil de température dans le mur, qui varie linéairement en fonction de x :

****

Pour déterminer les valeurs des constantes a et b qui définiront une solution particulière, on peut envisager plusieurs types de conditions de surface appliquées à ce mur, selon la nature du problème physique à résoudre.

3.1 Mur simple à faces isothermes

L’une des configurations possibles est d’imaginer que chacune des parois est maintenue à une température constante et connue. Ce sera par exemple le cas pour une maison qu’on désire chauffer à une température intérieure **T1** pendant qu’il règne une température extérieure **T2 .**

Pour **x = 0**, on aura : **m Cp T1 = b**

et pour  **x = e** : **m Cp T2 = a e + b**

d’où on tire : **m Cp (T2 - T1 ) = a e et a = m Cp (T2 - T1 ) / e**

Le profil de température dans la paroi a en définitive pour expression :

**m Cp T(x) = m Cp x (T2 - T1 ) / e + m Cp T1**

soit encore : **T(x) = T1 - (T1  - T2  ) x / e** (5)

Le profil de température est linéaire, avec un gradient égal à **- (T1  - T2  ) / e**



La densité de flux thermique à travers le mur est donnée par la loi de Fourier :

**ϕ = - λ dT / dx**

Le gradient étant constant, ce débit de chaleur a une valeur constante quelle que soit l’abscisse x dans la paroi. La température ne variera donc pas en fonction du temps. C’est le régime permanent.

**ϕ = - λ (T1  - T2  ) / (x1  - x2  )**

Soit :

 **ϕ = λ (T1  - T2  ) / e**  ( en W/m2 ) (6)

Le flux thermique transmis par conduction à travers la paroi est donc :

 **Φ = S ϕ = λ S (T1  - T2  ) / e**  ( en W ) (7)

On voit qu’il existe une relation de proportionnalité entre le flux thermique transmis par conduction à travers la paroi et la différence de température  **T1  - T2** .

La forme du coefficient de proportionnalité R rappelle l’expression donnant la résistance R d’un conducteur électrique de longueur e, de section S et de résistivité ρ = 1 / λ.

(l’inverse de la conductivité est la résistivité)

De même l’expression **T1  - T2 = R Φ** suggère un rapprochement avec la loi d’Ohm

**U1  - U2 = R I**

Pour ces deux raisons, le coefficient R de la relation **T1 - T2 = R Φ** est appelé **résistance thermique** de la paroi considérée.

La résistance thermique s’exprime en Kelvin/Watt ( K/W) ou en °C/W.

Nous verrons tout au long de ce chapitre que l’application des lois de l’électricité concernant l’association en série ou en parallèle de ces résistances thermiques, constitue une méthode simple et commode de résolution de très nombreux problèmes thermiques en régime permanent.

3.2 Paroi en contact avec deux fluides

Pour déterminer les valeurs des constantes a et b qui définiront une solution particulière, on a vu que l’on pouvait envisager plusieurs types de conditions de surface appliquées au mur.

Considérons maintenant une paroi d’épaisseur **e** en contact avec deux fluides de températures constantes **T∞1  et T∞2 .** Entre chacun des fluides et la paroi, il s’établit un échange convectif, les températures respectives de chacune des deux faces de la paroi étant **T1  et T2 .**

Il s’agit alors d’un problème dit mixte, combinant deux modes de transmission de la chaleur: la convection et la conduction.

Le problème étant unidimensionnel, la conservation du flux thermique (stationnarité du problème), se traduit par l’égalité des flux :

-  **Φ1 ,** cédé par le fluide chaud à la paroi (convection)

-  **Φ ,**  traversant la paroi (conduction)

-  **Φ2 ,**  cédé par la paroi au fluide froid (convection)

On a vu qu’on avait :

 **Φ1 =** h1 S (**T∞1  - T1**  ) (8)

 **Φ2 =** h2 S (**T2  - T**∞1 ) (9)

où h1 et h2 sont deux coefficients d’échange s’exprimant en W / ( m2 . °C ).

Quant au flux dans la paroi elle-même, on a déjà montré qu’il était égal à :

**Φ = λ S (T1  - T2  ) / e**

On définit alors les résistances thermiques convectives :

 **Rc1 = 1 / h1 S** (10)

 **Rc2 = 1 / h2 S** (11)

qui s’expriment en °C/W comme la résistance thermique de conduction R = e / λ S.

Soit :

**T1  - T2 = R . Φ** (12)

pour les trois résistances **Rc1  , R et Rc2** en série.

Par analogie avec les relations qui expriment le flux transmis en fonction de l’écart de température :

**Φ1 =** h1 S (**T∞1  - T1**  )

**Φ2 =** h2 S (**T2  - T**∞1 )

on peut écrire:

**Φ =** k S (**T∞1  - T∞2**) (13)

dans laquelle k désigne un coefficient global d’échange entre les deux fluides, coefficient k qui a pour expression:





Figure 2 - Transfert de chaleur entre deux fluides de part et d’autre d’une paroi.

La température en un point d’abscisse x est donnée par la relation :

**T∞1  - T(x) = [ Rc1 + R(x) ] Φ**

où**:**

 **R(x) = x / λ S**

En remplaçant **Φ** par l son expression, il vient :



(14)

3.3 Paroi multicouches en contact avec deux fluides

Ce sera par exemple le cas d’une paroi de four composée de deux couches. La première couche est un garnissage en briques réfractaires (épaisseur e1 = 0,20 m, conductivité λ1 = 1,38 W/(m . °C) ), la seconde est un isolant fibreux (épaisseur e2 = 0,10 m, conductivité λ2 = 0,17 W/(m . °C) ).

Nous supposerons que le contact est parfait entre les deux couches.

Par un raisonnement identique au précédent, on obtient de même :



(15)

avec:

**R i = e i / λ i S**

Appliquons ces résultats au four de traitement thermique dont les caractéristiques des parois ont été données au début de ce paragraphe.

La température de traitement à l’intérieur du four, **T∞1** , estde 1 650 °C, et le coefficient h1 d’échange sur la face intérieure vaut 70 W / (m2 . °C).

La température de l’air ambiant, **T∞2 ,** est de 25°C, et le coefficient h2 d’échange sur la face extérieure vaut 10 W / (m2 . °C).

Calculer les pertes de chaleur par m2 de surface de paroi, les températures des faces intérieures et extérieures, et celle de l’interface entre le briquetage et l’isolant.

Les pertes sont données par la relation :



avec : Rc1 = 1 / h1  = 0,0143 m2 . °C / W

 R1 = e1 / λ1 = 0,1449 m2 . °C / W

 R2 = e2 / λ2 = 0,5882 m2 . °C / W

 Rc2 = 1 / h2  = 0,100 m2 . °C / W

## Soit ϕ = 1916 W / m2

La température de la paroi interne est fournie par la relation :

T∞1 - T1 = (1/ h1)ϕ = 0,0143 . 1916 = 27,4 °C d’où T1 = 1622,6 °C

Cette température est peu différente de celle de l’atmosphère interne du four de traitement.

La température de l’interface entre les deux couches est obtenue de la même manière :

## T1 - T’ = ( e1 / λ1 ) ϕ soit T’ = 1344,6 °C

La température de la face externe de la paroi du four vaut :

T2 = **T∞2**  + ( 1 / h2 ) = 216,6 °C



Figure 3 - Évolution de la température dans la paroi d’un four

## 4 Cas général: Équation de la chaleur

 4.1 Bilan énergétique

Après avoir commencé par traiter le cas unidimensionnel en régime permanent, nous allons maintenant établir le bilan thermique d’une quantité de matière à l’état solide, contenue dans un volume fini **v**, délimité par une surface **s**, appartenant à un milieu en trois dimensions.

La substance considérée a des caractéristiques thermiques décrites par sa capacité thermique massique **c** et sa conductivité thermique **λ**. Nous supposerons que les grandeurs **c** et **λ** ne dépendent ni de l’espace (substance homogène), ni de la température (approximation valable tant que les écarts de température ne sont pas trop importants).

Nous supposerons en outre que le volume **v** contient des sources internes dégageant de la chaleur avec une puissance volumique **p** (par effet Joule par exemple).

Si le phénomène considéré n’est pas en régime permanent, mais en régime variable, cela signifie que l’échange de chaleur à travers la surface **s** provoque une variation de la quantité de chaleur accumulée dans le volume **v**.

La puissance thermique reçue (algébriquement) par le volume **v** a pour expression :

  (16)

Il faut y ajouter la puissance dégagée dans le volume v par les sources internes, soit:

  (17)

Pendant l’intervalle de temps **dt**, la substance contenue dans le volume **v** emmagasine donc une quantité de chaleur **Φ dt** , qui va provoquer une variation de température ****, dépendant de capacité thermique massique **c** .

Comme on raisonne sur l’unité de volume, il est nécessaire d’introduire la capacité thermique volumique égale à **ρ c**.

On aura donc: 

soit :

  (18)

La formule d’Ostrogradski permet de transformer l’intégrale de surface en une intégrale de volume:

  (19)

En combinant les équations (2.21) et (2.22), on obtient alors:

 ****

Le volume v considéré étant arbitraire, le bilan thermique instantané s’exprime localement en chaque point M du volume considéré par:

  (20)

 4.2 Équation de la chaleur en milieu homogène et isotrope

Si on tient maintenant compte de la Loi de Fourier :

****

le bilan devient:

****

c’est-à-dire finalement:

 **** (21)

qui constitue l’équation de la chaleur.

On écrit souvent cette équation sous la forme:

 **** (22)

en introduisant le paramètre:

 **** (23)

a est la *diffusivité thermique* de la substance considérée.

Cette définition conduit à l’équation aux dimensions suivantes :



soit:



c’est-à-dire:



La diffusivité thermique d’un solide s’exprime en m2/s, comme la viscosité cinématique d’un fluide.

 4.3 Différentes formes de l’équation de la chaleur

Selon la nature des problèmes examinés, l’équation de la chaleur prend des formes différentes.

 (a) *Cas d’un milieu sans sources internes, en régime permanent*

 **** (24)

c’est-à-dire :

  (25)

C’est l’équation de Laplace.

 (b)  *Cas d’un milieu avec sources internes, en régime permanent*

L’équation de la chaleur se réduit alors à :

 **** (26)

C’est l’équation de Poisson.

 (c)  *Cas d’un milieu sans sources internes, en régime variable*

L’équation de la chaleur se réduit alors à :

 **** (27)

C’est l’équation de Fourier.

## 5 Conditions aux limites spatio-temporelles

Chacune des formes de l’équation de la chaleur traduit, par une relation entre les variables x, y, z, t et la température T, le mécanisme de transport de la chaleur par conduction, en tout point de coordonnées x, y, z et à tout instant t.

Cette équation aux dérivées partielles, linéaire et du second ordre, admet en principe une infinité de solutions, faisant intervenir des constantes arbitraires.

Mais parmi ces solutions mathématiques, il n’y en aura qu’une seule qui présentera un sens physique, dès lors que l’on aura posé correctement un problème de thermique déterminé.

Ceci supposera :

(1) que l’on ait défini la géométrie du corps solide à travers lequel on désire étudier le phénomène de transmission de chaleur par conduction.

(2) que l’on connaisse la distribution initiale des températures à l’intérieur du solide et sur sa surface, à l’instant  **t = 0**.

En effet, l’équation de la chaleur décrivant un phénomène *irréversible*, ceci implique que le milieu considéré a été soumis, à l’instant initial, à une rupture de son équilibre thermique. L’évolution ultérieure du phénomène étant causée par ces conditions initiales, il est nécessaire de les connaître pour prévoir cette évolution.

(3) que l’on puisse traduire sous une forme mathématique stylisée, les conditions physiques réelles qui règnent à la surface du solide.

 (3 - a) Il peut s’agir d’une température imposée: TP = f (MP, t)

Si la température de paroi TP  est une constante, on parle de condition d’isothermie.

(3 - b) Il peut s’agir d’une densité de flux imposée: ϕ = - λ ( δT / δn )P = f (MP, t)

 - Si le corps est thermiquement isolé, le flux est nul en tout point de sa surface. On dira qu’il s’agit d’un corps adiabatique.

 - Si le corps est chauffé ou refroidi par un fluide, le transfert de chaleur s’effectue par convection. La densité de flux traversant la surface frontière est alors proportionnelle à l’écart de température entre la paroi et le fluide environnant:

 ϕ = h ( TP - T∞)

h est une constante appelée coefficient d’échange, et T∞ désigne la température du fluide loin de la paroi. C’est la condition de transfert de chaleur par convection dite loi de Newton. En utilisant la loi de Fourier, cette condition s’écrit:

 - λ ( δT / δn )P  = h ( TP - T∞) (28)

ou encore: TP + α (δT / δn )P  = f ( MP, t) avec α = λ/h

 - Enfin, le corps solide considéré échangera par rayonnement avec son environnement extérieur, une certaine quantité de chaleur. La densité de flux thermique échangée par rayonnement sera étudiée plus loin dans ce cours, mais il est important de réaliser que ce mode de transfert par rayonnement peut éventuellement constituer une condition de surface importante à exprimer, afin de pouvoir résoudre le problème de conduction.

D’une manière générale, les différents types de conditions de surface peuvent être superposés. Ainsi, la chaleur traversant une plaque métallique est transmise au milieu environnant, à la fois par convection et rayonnement.

## 6 Récapitulation des principales grandeurs thermiques

Les caractéristiques thermiques élémentaires des solides que l’on a définies dans l’exposé qui précède, sont:

1. la capacité thermique massique, ( ou chaleur massique)  **C**
2. la conductivité thermique λ
3. la diffusivité thermique  **a = λ / ρ c**

Le tableau suivant donne les propriétés thermiques de quelques corps, à 20°C

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Nature du corps | Masse volumique | Chaleurmassique | Conductivitéthermique | Diffusivitéthermique |
| Notation | ρ | C | λ | a |
| Unité | kg / m3  | J / (kg . K) |  W / ( m . K) | m2 / s |
| Argent | 10500 | 230 | 418 | 1,71 . 10-4 |
| Cuivre | 8940 | 380 | 389 | 1,14 . 10-4 |
| Aluminium | 2700 | 860 | 200 | 0,86 . 10-4 |
| Acier | 7850 | 490 | 46 | 0,12 . 10-4 |
| Béton | 2300 | 960 | 0,92 | 0,42 . 10-6 |
| Verre | 2530 | 840 | 1,20 | 0,58 . 10-6 |
| Polystyrène | 44  |  | 0,025 |  |
| Laine de verre | 200 | 0,67 | 0,040 |  |

1. L’arrêté du 23 juin 1978 limite la température de surface à Tmax = 28°C [↑](#footnote-ref-2)