Présentation de la solution détaillée de l'exercice 1

Exercice 1 : Déterminer si les applications suivantes sont linéaires

$a) f_1 : IR^2 \rightarrow IR^2$ $\quad$ $b) f_2 : IR^3 \rightarrow IR^3$ $\quad$ $c)\ f_3 : IR_3[x] \rightarrow IR^3$

(x,y)→(2x+y,x-y) $\quad$ (x,y,z)→(xy,x,y) $\quad$ P→(P(-1),P(0),P(1))

Correction de l'exercice 1 :

a) Etudions si f_1 est une application linéaire:

On a $\quad f_1(x, y) = (2x + y, x - y)$

Pour montrer que f_1 est une application linéaire il faut montrer que

$$1\text{- } \forall u, v \in IR^2, f_1(u+v) = f_1(u) + f_1(v)$$

$$2\text{-} \forall u \in IR^2, \forall \lambda \in IR, f_1(\lambda u) = \lambda f_1(u)$$

ou

$$\forall u, v \in IR^2, \forall \lambda \in IR, f_1(\lambda u + v) = \lambda f_1(u) + f_1(v)$$

En utilisant la première définition, on pose deux éléments $u, v\ de\ IR^2$, tel que $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$, on montre que

$$1\text{-} f_1(u+v) \overset{?}{=} f_1(u) + f_1(v)$$

on a $f_1(u+v) = f_1\big((x,y) + (x',y')\big) = f_1(x+x', y+y')$

$$= (2(x+x') + y + y', x + x' \text{-} y \text{-} y')$$

$$= (2x + y, x - y) + (2x' + y', x' - y')$$

$$= f_1(u) + f_1(v)$$

Et nous devons montrer aussi que

2-$f_1(\lambda u) =^? \lambda f_1(u)$

$$On\ a\ \ f_1(\lambda u) = f_1\big(\lambda(x,y)\big) = f_1(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x + \lambda y, \lambda x\text{-}\lambda y)$$

$$= \lambda(2x + y, x\text{-}y)$$

$$= \lambda f_1(u)$$

d'où f_1 est une application linéaire

b) Etudions si f_2 est une application linéaire:

On a $\quad f_2(x,y,z) = (xy, x, y)$

Pour montrer que f_2 est une application linéaire il faut montrer que

$\forall\ u, v\ de\ IR^3$, tel que $u = (x,y,z)$ et $v = (x', y', z')$,

$$f_2(u+v) =^? f_2(u) + f_2(v)$$

On a$f_2(u+v) = f_2\big((x,y,z)+(x',y',z')\big)$

$$= f_2(x+x', y+y', z+z')$$

$$= ((x+x')(y+y'), x+x', y+y')$$

$$= (xy + x'y' + x'y + xy', x + x', y +$$

$$= (xy, x, y) + (x'y', x', y') + (x'y + x$$

$$\neq f_2(u) + f_2(v)$$

d'où f_2 n'est pas une application linéaire.

Si nous prenons $u = (1,0,-1)$ et $v = (2,1,3)$ deux éléments de IR^3 tel que $\mathrm{u} + \mathrm{v} = (3,1,2)$

En calculant

$$f_2(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = f_2(3,1,2) = (3,3,1)$$

Et $f_2(u) + f_2(v) = f_2(1,0,-1) + f_2(2,1,3) = (0,1,0) + (2,2,1)$

$$= (2,3,1)$$

Nous remarquons que $f_2(\mathrm{u} + \mathrm{v}) \neq f_2(u) + f_2(v)$

c) Etudions si f_3 est une application linéaire:

On a $\forall P \in IR^3[x],\ f_3(P) = (\mathrm{P}(\text{-}1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1))$

Pour montrer que f_3 est une application linéaire il faut montrer que

$$\forall P, Q \in IR^3[x], \forall \lambda \in IR, f_3(\lambda P + Q) =?\, \lambda f_3(P) + f_3(Q)$$

on a $\quad f_3(\lambda P + Q) = ((\lambda P + Q)(-1), (\lambda P + Q)(0), (\lambda P + Q)(1))$

$$= (\lambda P(-1), \lambda P(0), \lambda P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1))$$

$$= \lambda(P(-1), P(0), P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1))$$

$$= \lambda f_3(P) + f_3(Q)$$

d′où f_3 est une application linéaire.